<36700066190010

<36700066190010

Bayer. Staatsbibliothek

Die

geometrischen Bücher

der

Elemente des Euclides;

als

Leitfaden

zum

Unterrichte in der Elementar-Geometrie,
mit vielen Anmerkungen

herausgegeben

von

Joh. Jos. Ign. Hoffmann,

Königlich Bayerischem Hofrathe, Director des Königl. Lyceums zu Aschaffenburg, Professor der Mathematik und Physik am Königl. Lyceum, erstem Professor an dem Königl. Forst-Lehrinstitute, Mitgliede der Wetterauischen Gesellschaft für die gesammte Naturkunde, der Kaiserlich-Leopoldinisch-Carolinischen Academie der Naturforscher zu Bonn, der Senkenbergischen naturforschenden Gesellschaft zu Frankfurt am Main, der Gesellschaft zur Beförderung nützlicher Künste und deren Hülfswissenschaften daselbst, und der Herzoglich-Sachsen-Gothaischen und Meiningischen Societät der Forst- und Jagdkunde zu Dreisigacker.

Mit sechzehn Steintafeln.

Mainz, 1829.

Bei Florian Kupferberg.

Bayerische Staatsbibliothek München

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Seinem

verehrten Freunde

und

vormaligen ausgezeichneten Schüler,

Herrn

Johann Wilhelm Busch,

Hauptmanne im Linien-Militär der freien Stadt Frankfurt, Mitgliede mehrerer gelehrten Gesellschaften ꝛc.

mit

aufrichtiger Hochachtung

gewidmet

vom

Verfasser.

Vorerinnerung.

Die Elemente des Euclides sind auf so mannichfaltige Art herausgegeben worden, daß eine neue Bearbeitung derselben unnütz scheinen mögte. Doch wird dieser Schein bei Jenen schwinden, welche den Gegenstand nachfolgender Schrift, ihren Zweck und die Art, denselben zu erreichen, genauer erwägen. Denn in jeder dieser drei Rücksichten wird sich diese neue Ausgabe der Elemente von den bereits vorhandenen unterscheiden.

Wenn ältere und neuere Schriftsteller entweder die dreizehn oder fünfzehn Bücher allein in der Grundsprache, oder mit beigefügter lateinischen Uebersetzung, oder nur in der lateinischen, deutschen oder in einer andern Sprache herausgegeben; oder wenn Andere lediglich die sechs ersten Bücher, nebst dem eilften und zwölften auf diese Weise behandelt, oder auch nur die vier ersten Bücher zum Gebrauche der allerersten Anfänger zusammengestellt; oder wenn sie diese Elemente auf eigne Art freier bearbeitet und zu eignen Lehrbüchern gestaltet haben, so sind, nach meinem Wissen, bloß die geometrischen Bücher des Euclides d. h. das **I. II. III. IV. VI. XI.** und **XII.** Buch, mit Ausschluß des **V.**,

welches arithmetisch ist, noch nicht im Deutschen erschienen. Unter den Franzosen hat *F. Peyrard* (Les Élémens de Géométrie d'Euclide, traduits littéralement etc. à Paris, 1804) eine wohlgelungene Uebersetzung derselben geliefert.

Das fünfte Buch, welches die Lehre von Verhältnissen und Proportionen enthält, konnte bei dieser neuen Ausgabe um so füglicher übergangen werden, als Euclides darin (3. bis 8. Erklär.) einen eignen Begriff von den Verhältnissen und Proportionen zum Grunde legt, worüber vielfach gestritten worden ist, und als die darauf folgenden geometrischen Bücher nur der Elementarlehren von Verhältnissen und Proportionen zu Hülfssätzen bedürfen, welche in jedem guten Handbuche der Arithmetik befriedigend vorgetragen sind.

Es hat demnach das folgende Werk zu seinem Gegenstande die Euclidische Planimetrie, im **I. II. III. IV.** und **VI.** und die Euclidische Stereometrie im **XI.** und **XII.** Buche; mit Ausschluß aller arithmetischen Bücher, welche, obwohl höchst lehrreich und von dem großen Scharfsinne des Erfinders zeugend, nicht zum Plane dieser Schrift gehören.

Bei der deutschen Bearbeitung hat sich der Herausgeber, ausser einigen der besten ältern Ausgaben, noch folgender neuern bedient:

1) Johann Friedr. Lorenz, Euclid's Elemente, fünfzehn Bücher, aus dem Griech. Halle, 1781.

2) ***F. Peyrard***, **Les Élémens de Géométrie d'Euclide. à Paris, 1804.**

3) Joh. Carl Friedr. Hauff, Euclid's Elemente, das I. bis zum VI. sammt dem XI. u. XII. Buche u. s. f. Zweite Aufl Marburg, 1807.

4) *J. Guilel. Camerer*, Euclidis Elementorum libri VI. priores graece et latine etc. T. I. Berolini, 1824. T. II. 1825.

5) Carl Brandan Mollweide, Euclid's Elemente, fünfzehn Bücher von J. F. Lorenz. Halle 1824.

Der Zweck dieser neuen Ausgabe ist ein doppelter. Es sollen sowohl die Anfänger, als andere Liebhaber des geometrischen Studiums mit dem Geiste der Euclidischen Geometrie so bekannt werden, daß ihnen eine klare Einsicht in die wissenschaftliche Verkettung der einzelnen Lehren und in die streng bindende Kraft ihrer Beweise zu Theil wird, um sich hierdurch von der Vortrefflichkeit dieses classischen Werks zu überzeugen.

Dann soll diese Ausgabe durch die Art, wie die Euclidischen Lehren dargestellt und durch die vielfach beigefügten Anmerkungen, worin sie erläutert, berichtigt oder erweitert werden, ein möglichst vollständiges Lehrbuch der Elementar-Geometrie seyn, und sowohl zum öffentlichen als privat Unterrichte dienen.

Welche feste Grundlage diese geometrischen Elemente zum erweiterten Studium der Geometrie und höherer Theile der Mathesis legen, beweiset unter andern das Beispiel der Engländer, bei welchen sie das vorzüglichste Lehrbuch der Geometrie sind, durch dessen Studium sich so viele ausgezeichnete Mathematiker gebildet haben. Es wäre daher sehr zu wünschen, daß auch den Deutschen

größere Liebe zu diesem hochberühmten Werke des Alterthums eingeflößt würde. Mögte diese neue Ausgabe Einiges hierzu beitragen!

Was nun die Art des Vortrags betrifft, so war eine Hauptsorge des Herausgebers darauf gerichtet, den Geist der geometrischen Elemente auf recht faßliche, angenehme, auch den Anfänger feßlende Weise darzustellen.

Daher wurde eine solche Form der Darstellung gewählt, welche zwischen der, sehr schätzbaren, ganz wörtlichen Uebersetzung von Hauff und der sehr abgekürzten, allgemein geachteten Ausgabe von Lorenz ein schickliches Mittel hält.

Zur Erläuterung dieses dreifach verschiedenen Vortrags diene die Darstellung des 1. Satzes im I. Buche der Elemente nach Hauff, Lorenz und nach gegenwärtiger Ausgabe. Die Figur sehe man Taf. I. Fig. 1.

I. Nach Hauff.

1. Satz.

Aufgabe. Auf einer gegebenen begränzten geraden Linie ein gleichseitiges Dreyeck zu beschreiben.

Es sey **AB** eine gegebene begränzte gerade Linie, und man soll auf derselben ein gleichseitiges Dreyeck beschreiben.

Auflösung. Man beschreibe aus dem Mittelpunkte **A**, mit der Weite **AB** (3. Ford.) einen Kreis **BCD**, und aus dem Mittelpunkte **B** mit der Weite **BA** einen Kreis **ACE**, alsdann ziehe man von dem Punkte **C**, in welchem die beiden Kreise einander schneiden, nach den Punkten **A** und **B** die Linien **CA**, **CB**.

Beweis. Weil der Punkt **A** des Kreises **CDB** Mittelpunkt ist, so ist die Linie **AC** (15. Erkl.) der Linie **AB** gleich. Ferner, weil der Punkt **B** des Kreises **CAE** Mittelpunkt ist, so ist die Linie **BC** der **BA** gleich. Es ist aber gezeigt worden, daß auch die Linie **AB** *) der **AB** gleich sey; folglich sind die beyden **CA**, **CB** der dritten **AB** gleich. Dinge aber, die einem dritten gleich sind, sind einander selbst gleich; folglich ist auch die Linie **CA** der **CB** gleich, und mithin sind die drei Linien **AC**, **AB**, **BC** einander gleich. Demnach ist (24. Erkl.) das Dreyeck **ABC** gleichseitig, auch ist es auf der gegebenen begränzten geraden Linie **AB** beschrieben, was zu verrichten war.

II. Nach Lorenz.

Der 1. Satz.

Auf einer gegebenen begrenzten geraden Linie, **AB**, einen gleichseitigen Triangel zu beschreiben.

---

*) Muß heißen AC, welches nicht unter den Druckfehlern bemerkt ist.

Aus dem Punkte **A** beschreibe (3. Post.) mit **AB** den Cirkel **BCD**, und aus dem Punkte **B** mit **BA** den Cirkel **ACE**. Vom Punkte **C**, in welchem sich beide Cirkel schneiden, ziehe (1. Post.) nach **A**, **B**, die geraden Linien **CA**, **CB**.

Da (15. Def.) **AC = AB**, und **BC = BA**, so ist (1. Ax.) **AC = BC**. Demnach ist **AC = AB = BC**, folglich (24. Def.) der auf **AB** beschriebene **△ CAB** gleichseitig.

III. Nach gegenwärtiger Ausgabe.

Der 1. Satz.

Aufgabe.

Auf eine gegebene begrenzte gerade Linie ein gleichseitiges Dreieck zu beschreiben.

Es sei (Fig. 1.) **AB** die gegebene begrenzte gerade Linie, auf welcher das gleichseitige Dreieck errichtet werden soll.

Auflösung.

Man beschreibe aus dem Puncte **A** mit **AB** den Kreis **BCD**, aus dem Puncte **B** mit **BA** den Kreis **ACE** (3. Ford.), ziehe vom Durchschnittspuncte **C** nach **A** die gerade Linie **CA** und nach **B** die gerade **CB** (1. Ford.)

Beweis.

Hier ist **AC = AB**, und
BC = BA (15. Erkl.) folglich auch
AC = BC (1. Gr.) daher ist

AC = AB = BC und folglich (24. Erkl.) das auf AB beschriebene Dreieck ein gleichseitiges.

Daß diese Darstellungsweise den Anfängern des geometrischen Studiums vorzüglich zusagend ist, weil sie Faßlichkeit mit Gründlichkeit verbindet, hat den Herausgeber ein sehr vieljähriger Vortrag der Geometrie an einer höhern Unterrichts-Anstalt gelehrt. Sehr zweckmäßig ist es, wenn bei dem Ausdrucke jedes Satzes, er sei Lehrsatz oder Aufgabe, die Hypothesis von der Thesis unterschieden und sowohl jene als diese durch klare Worte ausgesprochen wird. Ausserdem, daß der Anfänger hierdurch eine deutlichere Einsicht in dem Sinn dieser Sätze erhält, ist dieses auch sehr erleichternd zur Umkehrung der Theoreme, was den Ungeübten nicht selten Schwierigkeiten macht.

Was nun die, dieser Ausgabe beigefügten Anmerkungen betrifft, so hat sich der Herausgeber bemüht, Dasjenige in dieselben aufzunehmen, was, nach vieljährigen Erfahrungen im öffentlichen Vortrage der Geometrie, durch Berichtigung, Erläuterung oder Erweiterung der Euclidischen Lehren, zweckmäßig zum gründlichen Unterrichte der Anfänger geschienen hat. Keine Erklärung, kein Postulat und Axiom, so wie kein Satz der geometrischen Bücher ist ohne eine solche Anmerkung geblieben, welche nicht selten aus mehreren, und bisweilen aus vielen einzelnen Abschnitten besteht.

Bei den Erklärungen ist vor Allem der wichtige Unterschied zwischen Sach- und Wort-Erklärungen berücksichtigt worden. „Jene enthalten Behauptungen,

welche erwiesen werden müssen, wenn sie wissenschaftlichen Werth haben sollen. Der Begriff, welchen sie darstellen, muß ächt geometrisch d. h. vollkommen überzeugend construirt oder in der Anschauung dargestellt werden. So lange dieses nicht geschehen ist, bleibt ein gegründeter Zweifel über die Realität des Gegenstandes, welcher erklärt werden soll. Wenn Euclides in der 30. Erklär. des I. Buches sagt: « Unter den vierseitigen Figuren heißt jene ein Quadrat, welche gleichseitig und rechtwinkelig ist, » so bleibt dieses so lange eine bloße Worterklärung d. h. eine bloße Angabe des Begriffs, welchen man mit dem Worte Quadrat verbindet, bis die wissenschaftliche Entstehung desselben gelehrt wird. Ehe dieses geschieht, darf man mit Recht an der Wirklichkeit dieser Figur zweifeln. Daher müssen alle Wort-Erklärungen, durch überzeugende Gründe, in Sach-Erklärungen verwandelt werden. Euclides hat diesen Unterschied zwar nicht ausdrücklich bemerkt, und seine Erklärungen jedesmal an die Spitze jedes Buchs gestellt; doch beweiset er im Laufe der Sätze die wissenschaftliche Entstehung jener Objecte, deren Construction nicht für sich selbst schon einleuchtend ist.

Es hat dem Herausgeber zweckmäßig geschienen, bei den meisten Erklärungen des Euclides hierauf aufmerksam zu machen, weil dieses zur gründlichen und faßlichen Einsicht in den wissenschaftlichen Zusammenhang seiner Lehren sehr förderlich ist.

Auf ähnliche Art sind die Forderungen und Grundsätze erläutert worden. Besonders ist das

berüchtigte 11. Axiom hier schon nicht ohne die nöthigen Bemerkungen geblieben, welche dann später (zu I, 29. S.) weiter ausgeführt werden mußten. Der Herausgeber hat auch jetzt noch die Ueberzeugung, daß die befriedigende Darstellung der Parallelen-Theorie nur durch Beihülfe solcher Sätze, welche auf einer evidenten, nicht mehr ferner zu demonstrirenden und darum den Grund ihrer Wahrheit in sich selbst tragenden Anschauung gegeben werden kann. Jeder der zahlreichen Versuche, diese Lehre ganz frei von einem solchen anschaulichen Elemente zu begründen, ist mißlungen, wie der Herausgeber selbst an vielen derselben öffentlich nachgewiesen hat und für alle bekannte Darstellungen nachzuweisen bereit steht.

In den Anmerkungen zu den Lehrsätzen und Aufgaben hat der Herausgeber vor Allem dasjenige beigebracht, was ihm zur größern Klarheit, oder Schärfe, oder Vollständigkeit des Euclidischen Vortrags nöthig schien. Auch ist derselbe theils durch Angabe neuer Beweise, oder neuer Auflösungen, oder durch lehrreiche Folgerungen aus bewiesenen Vodersätzen erweitert worden. Alles dieses hier im Einzelnen aufzuzählen, würde zu weit führen. Daher werden die Liebhaber der Geometrie auf diese Anmerkungen selbst verweisen, in welchen auch die Sachkundigen nicht eine bloße Compilation des Vorhandenen, sondern nicht selten eigenthümliche Darstellungen und Darstellungsweisen erblicken werden. Bei den Erweiterungen ist die oben (S. V.) bemerkte griechische und lateinische treffliche Ausgabe von Camerer hie und da benützt und überhaupt für diese

Vergrößerung des Textes ein gewisses Maß beobachtet worden, damit sie nicht mehr enthalte, als zu einem brauchbaren Lehrbuche der Geometrie gehört.

Sämmtliche Anmerkungen sind am Schlusse des Euclidischen Textes, für jedes der sieben geometrischen Bücher insbesondere, beigefügt worden, um jenen Text durch ihre Verbindung mit demselben nicht allzu sehr zu trennen, was öfters die bequeme Uebersicht desselben erschwert hätte.

Da das fünfte Buch nicht in gegenwärtige Ausgabe aufgenommen worden ist, so muß vor dem Anfange des sechsten Buchs dasjenige gelesen werden, was in den Anmerkungen, als Vorerinnerung dazu (siehe **CLX**) gesagt worden ist.

Mögte dieses Werk, gleichwie es aus Liebe zur Wissenschaft entsprungen ist, auch liebevoll aufgenommen und zur Verbreitung eines gründlichen Wissens eifrig benützt werden!

Aschaffenburg, im October 1828.

Joh. Jos. Ign. Hoffmann.

Einleitung.

I.

Euclides der Geometer wird bisweilen mit Euclides dem Philosophen für eine Person gehalten; jedoch mit Unrecht. Dieser, zu Megara geboren, war einer der ersten Schüler des Socrates und der Stifter einer philosophischen Secte, welche sich mehr durch scharfsinnige Sophistik als in wahrhaft gründlichen Forschungen ausgezeichnet hatte. Schon deshalb kann der Mathematiker Euclides, aus dessen Schriften die höchste Klarheit und Gründlichkeit hervorleuchtet, nicht mit jenem einerlei seyn. Ausserdem begab sich Plato, wie Diogenes Laërtius berichtet, nach dem Tode des Socrates in einem Alter von dreißig Jahren, mit einigen seiner Mitschüler zu dem Philosophen Euclides. Da nun Socrates Tod auf 393 vor Chr. Geb. fällt; Euclides der Geometer aber, nach Proclus, ein Zeitgenosse des ältern Ptolemeus gewesen ist, so lebte derselbe fast um ein Jahrhundert später und kann somit durchaus nicht mit dem Euclides von Megara verwechselt werden.

II.

Obwohl Euclides der Geometer, nach arabischen Geschichtschreibern, ein Sohn des Naucrates gewesen und in Tyrus geboren seyn soll, so sind diese Quellen nicht ächt, und es ist vielmehr sehr wahrscheinlich, daß er Griechenland und späterhin Alexandrien bewohnt hatte. Seine Studien soll er zu Athen unter den Schülern des Plato gemacht und seinen Aufenthalt zu Alexändrien, wegen des Wohlwollens des ältern Ptolemeus, gewählt haben. Pappus schildert ihn als einen sanften und bescheidenen Mann, welcher allen Förderern der mathematischen Lehre vorzüglich gewogen war. Diese Vorzüge hatte er vor Apollonius, welcher, nach des Pappus Zeugniß, eitel und geneigt war, die Verdienste Anderer zu schmälern. Daß Euclides kein Höfling gewesen ist, beweiset die Antwort, welche er dem Könige Ptolemeus auf die Frage gab: Ob es keinen bequemern Weg zum Studium der Geometrie gebe als den gewöhnlichen? indem er erwiederte: Es gibt selbst für Könige keinen solchen.

III.

Euclides verdankt vorzüglich seinen Elementen jenen Ruhm, der seinem Namen die Unsterblichkeit sichert. Er stellte in diesem classischen Werke die wichtigsten Wahrheiten der Geometrie und Arithmetik in systematischer Ordnung zusammen. Obwohl er nicht Selbsterfinder von allen ist, so mag doch wohl der größere Theil das Resultat seiner eignen Studien und der ausgezeichneten Kraft seines Geistes seyn. Die Anordnung des Ganzen liefert den sprechendsten Beweis von dem wissenschaftlichen Sinn des Euclides, indem fast jeder Satz als Folge des kurz vorhergehenden, oder als Grund eines bald folgenden erscheint. Wegen dieser Vortrefflichkeit der Darstellung nennt Hauff (in seiner Ausgabe des

Euclides. Marburg, 1807. S. IV. d. Vorr.) diese Elemente das Buch der Bücher, welches seit mehr als zweitausend Jahren das Lehrbuch für die Welt gewesen ist. Bezieht man diesen Ausdruck auf die in den Elementen herrschende Evidenz und wissenschaftliche Form, nach welcher sie allen übrigen Wissenschaften zum vorleuchtenden Muster dienen (ohne einer derselben etwas von ihrem eigenthümlichen Werthe entziehen zu wollen), so muß man ihm vollkommen beipflichten.

IV.

Obwohl ältere und neuere Mathematiker die Elemente, in Rücksicht der Anordnung ihrer Sätze u. dgl. im Ganzen verbessern wollten, so ist ihnen dieses nicht zur Zufriedenheit der Kenner gelungen. Was der gründliche Kästner vormals (Anfangsgründe der Arithm. u. s. f. Götting. 1800. S. 453) gesagt hatte: «Ueber die unzähligen geometrischen Lehrbücher kann ich nur sagen, daß, von dem eignen Werthe der Geometrie: Deutlichkeit und Gewißheit, jedes desto weniger besitzt, je weiter es sich von Euclids Elementen entfernt,» gilt auch noch heut zu Tage und kann leicht im Einzelnen nachgewiesen werden. Wie einer der größten Denker, der fast in allen wissenschaftlichen Fächern als Genie glänzende Leibnitz hierüber geurtheilt hatte, berichtet uns der scharfsinnige Wolf (Elem. Mathes. univ. T. V. pag. 36) indem er sagt: «Praeter nos alii etiam Mathematici agnoverunt, reformatores Elementorum *Euclidis* non fuisse in ausu suo satis felices; sed *Euclidis* Elementis palmam adhuc merito tribuendam esse. Memini hanc fuisse *Leibnitio* sententiam, cum me inviseret, dum Elementis Geometriae concinnandis operam darem ipsique referrem, me multiplici modo tentasse, ut eo ordine Elementa Geometriae digererem, quo usus est *Bernhardus Lamy*, sed nunquam

hoc fieri potuisse, nisi quaedam assumerem absque demonstratione, quae essent demonstranda, vel in demonstrando ac definiendo admitterem confuse tantummodo percepta.»

V.

Unter den ältern Schriftstellern ist Peter Ramus als Gegner der Elemente aufgetreten, deren Anwendung er mißbilligt hatte. Er gab eine Schrift (Scholae Mathematicae. Francof. ad Moenum. 1599. 4.) heraus, in deren dritter Abtheilung solche critische Bemerkungen über die fünfzehn Bücher des Euclides enthalten sind. Auch hat Ramus selbst ein, nach seiner Ansicht vollkommneres mathematisches Werk (Arithmeticae libri duo, Geometriae septem et viginti, a Lazaro Schonero recogniti et aucti. Francof. ad Moenum, 1599. 4.) herausgegeben, welches jedoch, nach Wolf's Zeugniß (Elem. Mathes. univ. Tom. V. pag 34 et 35. Halae 1741) den Euclidischen Elementen, sowohl an systematischer Verbindung der Sätze, als an Strenge der Beweise nachsteht.

Andere tadelten an den Elementen des Euclides das von ihm öfters benützte Princip der Congruenz der Figuren, z. B. zweier Dreiecke, welche zwei Seiten, nebst dem von ihnen eingeschloßnen Winkel gemein haben, welches sich auf das sogenannte Aufeinanderfallen ihrer homologen Seiten und Winkel gründet, und nannten dieses eine mechanische Beweisart, welche sich nicht mit der streng wissenschaftlichen Methode vertrüge. — Nun ist zwar unläugbar, daß man nicht von einem Aufeinanderfallen, sondern von dem Ineinanderfallen zweier Ebenen, zweier geraden Linien oder zweier Winkel sprechen soll, indem Ebenen, Winkel und Linien keine Dicke haben, und somit auch nicht aufeinander fallen können. Betrachtet man aber die Congruenz auf gehörige Weise, so

fällt jeder Einwurf gegen ihre Evidenz weg; man überzeugt sich, daß z. B. zwei Dreiecke, welche so in einanderliegen, daß sie nur ein einziges bilden, als vollkommen identisch d. h. nur als ein einziges erscheinen. Gerade diese wissenschaftlich-anschauliche Darstellung ist der eigenthümliche Character der geometrischen Grundlehren und hierdurch der Grund ihrer Evidenz. Daher haben solche Beweisarten, weit entfernt unwissenschaftlich zu seyn, noch vor andern den Vorzug eines höhern Maßes von Klarheit.

VI.

Wer die Elemente des Euclides als ein vortreffliches, im Ganzen bis zum heutigen Tage unübertroffnes Werk verehrt, will damit nicht behaupten, daß es auch im Einzelnen durchaus frei von Gebrechen sei. Seine wärmsten Vertheidiger haben dieses nicht geläugnet. Euclides war als Mensch, gleich allen andern, dem Sprichworte: Fehlen ist menschlich, unterworfen. Allein es muß seinem so sehr reichhaltigen Werke zu größter Ehre gereichen, daß man, durch eine, über zweitausend Jahre fortgesetzte Critik, dasselbe jetzt wie vormals als classisch erkennt und nur in Bezug auf einzelne Sätze gegründete Bemerkungen zu machen vermogte. So gehen also diese Elemente, durch sorgfältig wissenschaftliche Prüfung, immer mehr ihrer höhern Vollkommenheit entgegen. Gerade darin besteht auch der Zweck der hier folgenden neuen Ausgabe der geometrischen Bücher dieser Elemente, daß in Anmerkungen zu jedem Satze dasjenige beigebracht wird, was theils Andere verbessert haben, oder was der Herausgeber durch acht und zwanzigjährige öffentliche Vorträge und eignes Nachdenken als förderlich zum gründlichen Studium der Elementar-Geometrie gefunden hat.

VII.

Euclides hat seine Elemente in dreizehn Büchern vorgetragen, deren Inhalt sich (nach Lorenz in seiner Uebersetzung derselben. Halle, 1781) auf folgende Art am Bequemsten übersehen läßt. Das Ganze besteht aus vier Abtheilungen. Die erste handelt von den ebenen Figuren im ersten bis sechsten Buche; die zweite von den Zahlen im siebenten bis neunten Buche; die dritte von commensurabeln und incommensurabeln Größen im zehnten Buche und die vierte von den Körpern im eilften, zwölften und dreizehnten Buche.

Die nähere Uebersicht ist folgende:

I. Abtheilung. Von ebenen Figuren, in Bezug auf ihre Gleichheit und Aehnlichkeit.

I. Buch. Von Dreiecken und Parallelogrammen.

1. Von Dreiecken. Satz 1 bis 26.

2. Von den Parallellinien und Parallelogrammen. Satz 27 bis 36.

3. Von der Vergleichung der Dreiecke mit den Parallelogrammen. Satz 37 bis 48.

II. Buch. Von Rechtecken und Quadraten, welche durch Abschnitte gerader Linien entstehen, wenn diese auf bestimmte Art getheilt oder verlängert werden. Satz 1 bis 14.

III. Buch. Vom Kreise.

1. Von geraden Linien in und an dem Kreise. S. 1 bis 19.

2. Von Winkeln in und an dem Kreise. Satz 20 bis 36.

IV. Buch. Von der Construction der ebenen Figuren in einander und um einander.

1. Vom Dreiecke und Kreise. Satz 1 bis 5.

2. Vom Quadrate und Kreise. Satz 6 bis 9.

3. Vom regelmäßigen Vielecke und Kreise. S. 10 bis 16.

V. Buch. Von den Verhältnissen und Proportionen stetiger Größen überhaupt.

1. Von gleichvielfachen Größen. Satz 1 bis 6.
2. Von Proportionalgrößen. Satz 7 bis 15.
3. Von den Veränderungen der Proportionen. Satz 16 bis 25.

VI. Buch. Von den Proportionen stetiger Größen im Besondern.

1. Von den Proportionen bei Dreiecken und Parallelogrammen. Satz 1 bis 17.
2. Von der Aehnlichkeit der Figuren. Satz 18 bis 33.

II. Abtheilung. Von den Zahlen, worin alle Sätze von Zahlen bewiesen werden, welche im V. Buche von stetigen Größen bewiesen worden sind.

VII. Buch. Von den unstetigen Proportionen der Zahlen.
1. Von gleichvielfachen Zahlen. Satz 1 bis 10.
2. Von unstetigen Proportionalzahlen. Satz 11 bis 41.

VIII. Buch. Von der stetigen Proportion der Zahlen.
1. Von stetigen Proportionalzahlen. Satz 1 bis 13.
2. Von ähnlichen Flächen- und Körperzahlen. Satz 14 bis 27.

IX. Buch. Von einigen besondern Arten der Zahlen.
1. Von Quadrat- und Cubikzahlen. Satz 1 bis 10.
2. Von den Primzahlen. Satz 11 bis 20.
3. Von geraden und ungeraden Zahlen. Satz 21 bis 34.
4. Von den vollständigen Zahlen. Satz 35 bis 36.

III. Abtheilung. Von der Commensurabilität der Größen.

X. Buch. 1. Von commensurabeln und incommensurabeln Größen. Satz 1 bis 19.
2. Von rationalen und medialen Größen. S. 20 bis 36.
3. Von Irrationalgrößen aus dem Zusammensetzen. Satz 37 bis 73.
4. Von Irrationalgrößen durch Wegnahme. Satz 74 bis 111.

5. Von der Vergleichung aller vorhergehenden Irrationalgrößen. Satz 112 bis 117.

IV. Abtheilung. Von den geometrischen Körpern.

XI. Buch. 1. Von der Lage der Ebenen. Satz 1 bis 19.

2. Von den Körperwinkeln. Satz 20 bis 23.

3. Von den Parallelopipeden. Satz 24 bis 40.

XII. Buch. 1. Von den Pyramiden und Prismen. Satz 1 bis 9.

2. Von den Kegeln und Cylindern. Satz 10 bis 15.

3. Von der Kugel. Satz 16 bis 18.

XIII. Buch. 1. Von den, nach stetiger Proportion getheilten Linien. Satz 1 bis 6.

2. Von regelmäßigen Figuren. Satz 7 bis 12.

3. Von den fünf regelmäßigen Körpern. Satz 13 bis 18.

VIII.

Ausser diesen dreizehn Büchern gibt man bisweilen noch ein vierzehntes und fünfzehntes, als zu Euclids Elementen gehörig, an. Indessen sind sie kein nöthiger Bestandtheil derselben und man ist überzeugt, daß ihr Verfasser nicht Euclides, sondern der Geometer Hypsicles von Alexandrien war, der im zweiten Jahrhundert nach Chr. Geb. gelebt hatte. Da jedes dieser Bücher nur aus sieben Sätzen besteht, so können beide als ein Anhang zu den Elementen betrachtet werden, der aber nicht nothwendig zu ihrem Inhalte gehört. Daher sind auch diese zwei Bücher in vielen Ausgaben der Elemente nicht mit aufgenommen worden.

IX.

Ausser den Elementen hat Euclides noch Mehreres geschrieben. Sein wichtigstes Werk bestand aus drei

Büchern mit der Aufschrift: Porismata oder Porismen, welches aber verloren gegangen ist. Pappus, welcher berichtet, es habe sehr schwierige Aufgaben aus der Analysis der Alten aufgelöset, indem er sagte: collectio artificiosissima multarum rerum quae spectant ad analysin difficiliorum et generaliorum problematum, quorum ingentem copiam praebet natura, etc., hat sich bemüht, einiges Licht über dasselbe zu verbreiten; jedoch ohne befriedigende Resultate. Dem in der Geometrie der Alten hocherfahrnen Robert Simson war es vorbehalten, sich um diese Porismen des Euclides vorzügliches Verdienst zu erwerben.

Sein Werk heißt: *Roberti Simson*, Matheseos nuper in Acad. Glasguensi Professoris opera quaedam reliqua, scilicet I. Apollonii Pergaei de sectione determinata Libri II. restituti, duobus insuper libris aucti; II. Porismatum liber, quo doctrinam hanc veterum Geometrarum ab oblivione vindicare et ad captum hodiernorum adumbrare constitutum est; III. De Logarithmis liber; IV. De limitibus quantitatum et rationum, fragmentum; V. Appendix, pauca continens problemata, ad illustrandam praecipue veterum *Geometrarum* analysin. Nunc primum post Auctoris mortem in lucem edita, impensis quidem Phil. Comitis *Stanhope*, cura vero Jac. *Clow*, in ead. Acad. Prof. cui Auctor omnia sua manuscripta testamento legaverat... Glasguae, 1776, 4to.

Der Begriff vom Porisma wird zum Theil verschieden angegeben. Simson sagt: Porisma est propositio, in qua proponitur demonstrare rem aliquam, vel plures datas esse, cui, vel quibus, ut et cuilibet ex rebus innumeris, non quidem datis, sed quae ad ea quae data sunt, eandem habent rationem, convenire ostendendum est affectionem quandam communem in propositione descriptam. Daß diese Erklärung nicht besonders faßlich sei, bedarf keiner Erinnerung.

Klügel (Mathem. Wörterbuch, Art. Porisma) sagt: «Porisma ist ein Satz, in welchem ausgesagt wird, daß einem oder mehreren gegebenen (unveränderlichen) Dingen, so wie auch unzählig vielen Dingen, die zwar nicht gegeben werden, aber zu den gegebenen Dingen eine bestimmte Relation haben, eine gewisse gemeinschaftliche Beschaffenheit zukomme.» Oder: «Porisma ist eine Aufgabe, worin gefodert wird, etwas Bestimmtes, das mit einem Unbestimmten nach gewissem Gesetze verknüpft sei, zu finden.»

Ein Beispiel aus Robert Simson (wozu man sich leicht die Zeichnung entwerfen wird) sei folgendes. — Wenn ein Kreis der Lage und Größe nach und eine gerade Linie ausser ihm der Lage nach gegeben ist, so wird ein Punct gegeben seyn, der die Eigenschaft hat, daß, wenn irgend eine gerade, durch ihn gezogene Linie sowohl jenen Kreis als jene gerade Linie schneidet, das aus ihren Segmenten gebildete Rechteck immer von bestimmter unveränderlicher Größe ist. — Der verlangte Punct ist jener, in welchem ein von dem Mittelpuncte des Kreises auf die gegebene gerade Linie gezognes Loth die Peripherie dieses Kreises durchschneidet, wovon der Beweis durch die entstehenden ähnlichen Dreiecke leicht gefunden wird.

X.

Ferner war Euclides Verfasser einer Schrift, welche den Titel führt: Die Data des Euclides. Auch der Begriff dieser Data ist verschieden angegeben worden. Klügel (Mathem. Wörterb. Th. I. S. 706) sagt folgendes: «Mittelst dieser Sätze sucht man bei der Auflösung einer Aufgabe, was aus den gegebenen Dingen folgt, was aus diesem wieder hergeleitet wird u. s. w., bis daß man findet, daß das, was in der Aufgabe zu leisten verlangt wird, gegeben sei. Oder

man geht von dem Gesuchten als gegeben aus, und sucht, wie man durch Größen und Verhältnisse, deren eines durch das andere gegeben wird, auf etwas Gegebenes komme, um von diesem wieder auf das Gesuchte zurückzugehen.

Beispiele. 1) Wenn zwei oder mehrere Größen zu einander gegebene Verhältnisse haben, und wenn sie zu andern Größen gegebene, wenn auch nicht einerlei Verhältnisse haben, so werden diese andern Größen auch gegebene Verhältnisse zu einander haben. 2) Wenn in einem Dreiecke ein Winkel gegeben ist, so hat das Rechteck von den ihn einschließenden Seiten zu dem Dreiecke ein gegebenes Verhältniß.»

Diese Data sind, mit den übrigen Schriften des Euclides, von Dasypodius zu Straßburg i. J. 1571 zuerst griechisch und lateinisch herausgegeben worden. Später, i. J. 1625, erschien eine besondere Ausgabe mit lateinischer Uebersetzung und mit Anmerkungen von Claudius Hardy, welche Gregory seiner griechischen Ausgabe des Euclides, Oxford, 1703 beigefügt hat. Durch Robert Simson ist später eine englische Uebersetzung geliefert worden, mit Verbesserungen und Abänderungen des Textes. Diese Ausgabe ist dann i. J. 1780 von Joh. Christ. Schwab unter dem Titel: Euclides Data, verbessert und vermehrt von Robert Simson, aus dem Englischen übersetzt und mit einer Sammlung geometrischer, nach der analytischen Methode der Alten aufgelößter Probleme begleitet worden. Im Jahre 1825 erschien: Euclides Data, nach dem Griechischen mit Robert Simsons Zusätzen herausgegeben von Jul. Fried. Wurm. Berlin, 8. Mit 2 Steintafeln, welche Schrift als wohlfeile Handausgabe zu empfehlen ist. — Ueberhaupt werden diese Data als ein schätzbares Ueberbleibsel der Geometrie der Alten anerkannt.

XI.

Ausserdem ist Euclides noch als Verfasser folgender Schriften bekannt.

1) Vier Bücher über die Kegelschnitte, von welchen Pappus sagt, daß sie diese Lehre sehr erweitert hatten und einen großen Theil der vier ersten Bücher des Apollonius über diesen Gegenstand bildeten;

2) Zwei Bücher über die geometrischen Orte auf Oberflächen, wovon man nur weiß, daß sie die Linien von doppelter Krümmung zum Gegenstande hatten;

3) Noch führt Proclus eine Schrift des Euclides unter dem Titel: De Divisionibus an, ohne den Gegenstand ihres Inhaltes näher zu bezeichnen. Vielleicht war es eine Abhandlung über die Theilung der Figuren zum theoretischen oder practischen Gebrauche.

4) In einer Schrift De Phaenomenis hat Euclides geometrische Beweise über die Erscheinungen des Auf- und Untergangs der Gestirne gegeben. Sowohl diese, als auch sein Werk über die Musik, unter dem Titel: Isagoge seu Introductio musica, in zwei Büchern, worin er vorzüglich die Musik der Alten behandelt, ist uns überliefert worden.

5) Endlich schreibt man dem Euclides noch zwei Bücher über die Optik zu, von welchen es aber ungewiß ist, ob sie ihn wirklich zum Verfasser haben, obwohl Proclus und Theon bezeugen, daß er über diesen Gegenstand geschrieben habe. Eben so wenig ist es wahrscheinlich, daß Euclides Urheber der Schrift: De Levi et Ponderoso sei.

XII.

Es gibt wenige Werke, welche so viele Ausgaben erlebten, in so vielerlei Sprachen übersetzt wurden und auf so vielerlei Art bearbeitet worden sind, als die Elemente des Euclides.

Die Wichtigkeit des Stoffs und die Vortrefflichkeit seiner Darstellung rechtfertigen dieses. Eine ausführliche Anzeige davon würde ein eignes Werk bilden. Daher soll hier nur Einiges beigebracht werden.

Theon von Alexandrien schrieb zuerst einen Commentar über die dreizehn Bücher der Elemente und erlaubte sich mancherlei Aenderungen im Texte.

Proclus commentirte mit großer Ausführlichkeit über das erste Buch der Elemente.

Unter den Orientalen verdient Nassir-Eddin, ein berühmter persischer Geometer, welcher um das Jahr 1250 lebte, genannt zu werden, dessen schätzbarer Commentar i. J. 1594 in einer schönen arabischen Ausgabe erschienen ist. Auch haben die Hebräer Moses Aben-Tibon, Isaac ben-Honain u. A. Uebersetzungen geliefert, welche sich in einigen Bibliotheken vorfinden.

Auf ähnliche Art erschienen im Laufe der Zeit Ausgaben und Bearbeitungen der Elemente in der lateinischen, deutschen, französischen, italienischen, spanischen, englischen, holländischen, schwedischen, dänischen Sprache, und es wird, ausser der h. Schrift, nicht leicht ein Buch geben, welches weiter auf der Erde verbreitet worden ist, als diese Elemente.

Eine sehr vollkommne Ausgabe des Grundtextes ist die von David Gregory unter dem Titel: Euclidis quae supersunt omnia, ex recensione Dav. Gregorii. Oxon. 1703. Fol., welche auch eine lateinische Uebersetzung enthält.

Die erste gedruckte lateinische Ausgabe ist die von dem berühmten Buchdrucker Erhard Ratdold zu Augsburg, welche i. J. 1482 zu Venedig in Fol. erschienen ist. Kästner hat von ihr in einem Schreiben an den Cardinal Quirini, Leipzig 1750, nähere Nachricht gegeben. Sie ist nach Campani's Uebersetzung aus dem Arabischen bearbeitet.

Unter allen Herausgebern und Commentatoren der Elemente, hat sich der scharfsinnige Jesuit Clavius vorzüglich berühmt gemacht. Seine Schrift heißt: Euclidis Elementorum libri XV. Accessit liber XVI. de solidorum regularium cujuslibet intra quodlibet comparatione. Omnes perspicuis demonstrationibus, accuratisque scholiis illustrati, nunc quartò editi, ac multorum rerum accessione post primam editionem locupletati. Auctore *Christophoro Clavio*, Bambergensi è societate Jesu. Francofurti, ex officina Typographica Nicolai Hoffmanni. Sumptibus Jonae Rhodii. MDCVII. 8. Der erste Band der vor uns liegenden Ausgabe enthält 671 Seiten Text und Commentar, dann 128 Seiten theils Vorerinnerungen; meist aber die ausführliche Darstellung aller einzelnen Sätze in den Elementen, was allerdings eine bequeme Uebersicht gewährt. Uebrigens findet man in diesem Bande die VI. ersten Bücher. Der zweite Band gibt sodann die folgenden IX. Bücher nebst einem XVI. Buche De solidorum regularium cujuslibet intra quodlibet comparatione, in 680 Seiten. — Die frühere dritte Ausgabe ist i. J. 1591 zu Cölln in Fol. erschienen. Der Commentar des Clavius zeichnet sich durch Gründlichkeit und Ausführlichkeit (welche jedoch bisweilen etwas zu weit zu gehen scheint) vor Andern sehr rühmlich aus. Die erste Ausgabe erschien zu Rom i. J. 1574 in zwei Octavbänden.

Pierre Herigone hat in seinem Cursus Mathematicus nova, brevi et clara methodo demonstratus per notas reales et universales, citra usum cujuscunque idiomatis intellectu faciles. Paris. 1634 die XIV. Bücher der Elemente lateinisch und französisch, mit vielen Abkürzungen und Zeichen herausgegeben, und war, nach Kästner's Meinung, der erste, welcher sich dieses Mittels bediente, um eine Reihenfolge von Schlüssen bequemer als durch Worte darzustellen.

Von Barrow ist bekannt: Euclidis Elementorum Libri XV, breviter demonstrati opera *Js. Barrow*. Cantabr, 1675, wovon i. J. 1676 zu Osnabrück ein Nachdruck erschienen ist. Durch den Gebrauch arithmetischer Zeichen ist die Schrift, gegen frühere Ausgaben, sehr compendiös geworden.

Zum Besten der ersten Anfänger hatte man schon längst besondere Ausgaben der ersten sechs Bücher veranstaltet; z. B. Euclidis Elementorum Libri 6 .... a *Mauritio Steinmetz*. Lips. 1577, worin die Sätze griechisch und lateinisch, jedoch nur die ersten drei Bücher mit Beweisen vorkommen. Desgleichen: *Jac. Peletarii* in Euclidis Elementa Geometrica Demonstrationum Libri rex. 1610. apud Joann. Tornaesium. 4to, welche die Sätze griechisch und lateinisch und ihre Beweise enthalten.

XIII.

Von spätern Ausgaben bemerken wir folgende:

Euclid's Elemente, fünfzehn Bücher, aus dem Griechischen übersetzt von Joh. Fried. Lorenz. Halle, 1781, 8. mit eingedruckten Holzschnitten. Ein sehr brauchbares Werk und besonders wegen Kürze und bequemer Uebersicht der Darstellung zu empfehlen. Es erschienen mehrere Ausgaben, deren neueste die von Carl Brandan Mollweide ist. Halle, 1824. 8. XXXII. und 444 Seiten.

Euclid's Elemente; das erste bis zum sechsten, sammt dem eilften und zwölften Buche. Aufs neue aus dem Griechischen übersetzt von Joh. Carl Fried. Hauff. Zweite verbesserte, mit einer neuen Parallelentheorie vermehrte Auflage. Marburg, 1807. LIII und 369 S. 8. Mit vielen eingedruckten Holzschnitten. Verdient als wohlgelungene wörtliche Uebersetzung des Urtextes vorzügliche Erwähnung.

Les Eléméns de Géometrie d'Euclide, traduits littéralement, et suivis d'un Traité du Cercle, du Cylindre, du Cône et de la Sphère; de la mesure des Surfaces et des Solides, avec des notes. Par *F. Peyrard,* Bibliothécaire de l'École Polytechnique. A Paris. 1804. XV. et 573 p. 8. mit acht Kupfertafeln. Diese sehr empfehlungswerthe Schrift enthält das I. II. III. IV. VI. XI. und XII. Buch der Elemente in einer wohlgelungenen, klaren, wörtlichen Uebersetzung des Grundtextes. Die Supplemente sind ganz nach der Methode des Euclides abgefaßt und die Noten enthalten zweckmäßige Bemerkungen zum Texte. Auch verdient der Druck vorzüglichen Beifall.

Die sechs ersten Bücher, nebst dem eilften und zwölften der Elemente des Euclides. Mit Verbesserung der Fehler, wodurch Theon und Andere diese Bücher entstellt haben, und den Elementen der ebenen und sphärischen Trigonometrie. Von Robert Simson, M. D. ehemals Professor der Mathematik zu Glasgow. Aus dem Englischen übersetzt von Math. Reder.... Herausgegeben von J. H. Jos. Niesert, Pastor zu Welen u. s. f. Paderborn, b. Jos. Wesener. 1806. XVI. u. 620 S. gr. 8. Mit vielen eingedruckten Holzschnitten und 5 Steintafeln. Dieses, durch sehr gutes Papier und guten Druck ausgezeichnete Werk scheint nicht die verdiente Aufnahme gefunden zu haben, obwohl die critischen Anmerkungen und Zusätze (S. 641 bis 748) von Wichtigkeit sind.

Eine, durch Correctheit des griechischen Textes und der zur Seite stehenden lateinischen Uebersetzung, durch eine Menge sehr lehrreicher Anmerkungen, durch eigens beigefügte Abhandlungen über folgende Sätze: I, 29; I, 47; I, 47, 48; II, 12, 13; III, 16; V, Erkl. 5 u. 7; VI, Erkl. 5, und durch guten Druck und gutes Papier ganz vorzügliche Ausgabe ist folgende: Euclidis Elementorum Libri sex priores, graece et latine, commentario e scriptis veterum ac recentiorum mathema-

ticorum et Pfleidereri maxime illustrati. Edidit *Jo. Guilelmus Camerer*, Gymnasii Stuttgardiani Rector. Berolini, 1824. Tom. I. Complectens Libr. I. — III. XXX. et 482. pag. 8vo cum 10 tabulis. Tom. II. Complectens Libr. IV — VI. cum 6 tabulis. Berolini 1825. 379 pag.

Von frühern guten Ausgaben verdienen noch folgende bemerkt zu werden.

a) Die lateinische von Bärmann. Leipzig, 1743. 8.

b) Die lateinische von Tacquet. Rom, 1745. 8.

c) Die lateinische von Robert Simson. Glasgow, 1756. 4.

d) Die französische von König. à la Haye, 1758. 4.

Wer umständlichere Nachricht von den verschiedenen Ausgaben der Elemente verlangt, findet sie in folgenden Schriften:

Scheibel's Einleitung zur mathematischen Bücherkenntniß I. Stück.

Fabricius Biblioth. Graec. Lib. III. cap. 14.

Matthias Bose Schediasma litterarium, quo contenta Elem. Eucl. enunciat, simul de variis editionibus post Fabricium disserit. Lips. 1737.

Abrah. Gotth. Kästner's Geschichte der Mathematik I. Band, S. 248 u. f.

J. F. Montucla (de l'institut nationale de France) Histoire des Mathématiques, dans laquelle on rend compte de leurs progrès depuis leur origine jusqu'à nos jours; où l'on expose le tableau et le développement des principales découvertes dans toutes les parties des Mathématiques, les contestations qui se sont élevées entre le Mathématiciens, et les principaux traits de la vie de plus célèbres. Nouvelle édition, considérablement augmentée et prolongée jusque vers l'époque actuelle. A Paris. An VII. Tome I, VIII et 739 p. 4to. Mit zwölf Kupfertaf. Tome II. 717 p. mit 14 Kupfertaf. Ein sehr reichhaltiges, vortreffliches Werk.

Joseph Wolfg. Müller Auserlesene mathematische Bibliothek u. s. w. Nürnberg, 1820. 8. XXII u. 266 S. — Dessen Repertorium der mathematischen Literatur, in alphabetischer Ordnung. 144 S. Ist sehr zu empfehlen.

Die
geometrischen Bücher
der
Elemente des Euclides.

Das
erste Buch
der
Elemente des Euclides.

Dieses Buch handelt:

1. Von den Dreiecken. Satz 1—26.
2. Von den Parallellinien und den sich hierauf gründenden Eigenschaften der Dreiecke und Parallelogramme. Satz 27—40.
3. Von der Vergleichung der Dreiecke mit den Parallelogrammen. Satz 41—48.

Erklärungen des ersten Buchs.

1. Ein Punct ist dasjenige, was keine Theile hat.
2. Die Linie ist eine Länge ohne Breite.
3. Die Grenzen der Linie sind Puncte.
4. Eine gerade Linie ist jene, welche zwischen den in ihr befindlichen Puncten einerlei Lage hat.
5. Eine Fläche ist dasjenige, was nur Länge und Breite hat.
6. Die Grenzen der Fläche sind Linien.
7. Eine ebene Fläche (oder Ebene) ist jene, welche zwischen den in ihr befindlichen geraden Linien gleichförmig liegt.
8. Ein ebener Winkel ist die Neigung zweier Linien gegen einander, die sich in einer Ebene berühren, ohne eine gerade Linie zu bilden.
9. Sind die Linien, welche den Winkel bilden, gerade Linien, so heißt der Winkel ein geradliniger.
10. Steht eine gerade Linie so auf einer andern, daß sie mit ihr gleiche Nebenwinkel bildet, so heißt sie senkrecht (oder lothrecht, oder perpendiculär) auf der andern, und jeder der beiden gleichen Winkel heißt ein rechter Winkel.
11. Ein stumpfer Winkel heißt jener, der größer ist, als ein rechter.
12. Ein spitzer Winkel aber ein solcher, der kleiner als ein rechter ist.
13. Die Grenze heißt dasjenige, was das Aeußerste eines Dinges ist.

14. Eine Figur ist dasjenige, was von einer oder mehreren Grenzen umschlossen ist.

15. Der Kreis ist eine ebene Figur, welche von einer einzigen krummen Linie, dem Umkreise oder der Peripherie, so eingeschlossen ist, daß alle gerade Linien, welche aus einem innerhalb derselben befindlichen Puncte an die Grenze gezogen werden, einander gleich sind.

16. Dieser Punct heißt Mittelpunct des Kreises.

17. Der Durchmesser des Kreises ist jede gerade Linie, welche durch seinen Mittelpunct an beide Seiten der Peripherie geht, und auch den Kreis halbirt.

18. Der Halbkreis ist eine von dem Durchmesser und von dem durch diesen abgeschnittenen Kreisbogen umschlossene Figur.

19. Der Abschnitt des Kreises (oder das Segment) ist jenes Stück desselben, welches von einer geraden Linie und einem Kreisbogen umschlossen ist.

20. Geradlinige Figuren sind jene, welche von geraden Linien umschlossen sind.

21. Dreiseitige Figuren (oder Dreiecke) jene, welche von drei;

22. Vierseitige Figuren (oder Vierecke) jene, welche von vier;

23. Vielseitige Figuren (oder Vielecke) jene, welche von mehr, als vier geraden Linien umschlossen sind.

24. Unter den dreiseitigen Figuren heißt jene ein gleichseitiges Dreieck, welche drei gleiche Seiten hat.

25. Ein gleichschenkeliges Dreieck heißt jenes, welches nur zwei gleiche Seiten hat.

26. Ein ungleichseitiges Dreieck ist dasjenige, welches drei ungleiche Seiten hat.

27. Ferner heißt unter den Dreiecken jenes ein rechtwinkeliges, welches einen rechten Winkel hat;

28. Jenes ein stumpfwinkeliges, welches einen stumpfen, und

29. Jenes ein spitzwinkeliges Dreieck, welches drei spitze Winkel hat.

30. Unter den vierseitigen Figuren heißt jene ein Quadrat, welche gleichseitig und rechtwinkelig ist.

31. Ein längliches Viereck oder Rechteck heißt jene, welche zwar rechtwinkelig, aber nicht gleichseitig ist.

32. Ein Rhombus oder eine Raute jene, welche gleichseitig, aber nicht rechtwinkelig ist.

33. Eine Rhomboide jene, worin die entgegenstehenden Seiten und Winkel einander gleich sind, ohne gleichseitig oder rechtwinkelig zu seyn.

34. Alle übrige vierseitige Figuren werden Trapeze genennt.

35. Parallele Linien sind jene gerade Linien in einerlei Ebene, welche, so weit sie auch nach beiden Seiten verlängert werden, doch an keiner Seite zusammentreffen.

Forderungen.

1. Von jedem Puncte nach jedem andern eine gerade Linie zu ziehen.

2. Eine begrenzte gerade Linie stetig in gerader Richtung zu verlängern.

3. Aus jedem Puncte mit jedem Abstande einen Kreis zu beschreiben.

Grundsätze.

1. Dinge, welche einem dritten gleich sind, sind auch einander selbst gleich.

2. Wenn man Gleiches zu Gleichem hinzusetzt, so sind auch die Ganzen gleich.

3. Wenn Gleiches von Gleichem weggenommen wird, so sind die Reste gleich.

4. Wenn man Gleiches dem Ungleichen beifügt, so sind die Ganzen ungleich.

5. Wenn man Gleiches vom Ungleichen wegnimmt, so sind auch die Reste ungleich.

6. Wenn zwei Dinge einander gleich sind, so sind auch ihre Doppelten einander gleich.

7. Wenn zwei Dinge einander gleich sind, so sind auch ihre Hälften einander gleich.

8. Wenn Dinge einander decken, so sind sie auch einander gleich.

9. Das Ganze ist größer, als sein Theil.

10. Alle rechte Winkel sind einander gleich.

11. Wenn zwei gerade Linien von einer dritten so durchschnitten werden, daß die beiden innern, an einerlei Seite der schneidenden Linie liegenden Winkel, kleiner als zwei rechte sind, so treffen jene zwei gerade Linien, genugsam verlängert, an eben der Seite zusammen.

12. Zwei gerade Linien schließen keinen Raum ein.

Der 1. Satz.

Aufgabe.

Auf eine gegebene begrenzte gerade Linie ein gleichseitiges Dreieck zu beschreiben.

Es sei (Fig. 1.) AB die gegebene begrenzte gerade Linie, auf welcher das gleichseitige Dreieck errichtet werden soll.

Auflösung.

Man beschreibe aus dem Puncte A mit AB den Kreis BCD, aus dem Puncte B mit BA den Kreis ACE (3. Ford.), ziehe vom Durchschnittspuncte C nach A die gerade Linie CA und nach B die gerade CB (1. Ford.)

Beweis.

Hier ist AC = AB und

BC = BA (15. Erkl.) folglich auch

AC = BC (1. Gr.) daher ist

AC = AB = BC und folglich (24. Erkl.) das auf AB beschriebene Dreieck ein gleichseitiges.

Der 2. Satz.

Aufgabe.

An einen gegebenen Punct eine gerade Linie zu legen, welche einer gegebenen geraden gleich ist.

Es sei A (Fig. 2.) der gegebene Punct, BC die gegebene gerade Linie, und man soll an A eine gerade Linie legen, welche der BC gleich ist.

Auflösung.

Man ziehe (1. Ford.) von A nach B die gerade Linie AB, beschreibe über dieselbe (1. Satz) das gleichseitige Dreieck DAB, und verlängere die Linien DA und DB nach E und F (2. Ford.) Dann beschreibe man aus B mit BC (3. Ford.) den Kreis CGH, und aus D mit DG den Kreis GKL.

Beweis.

Hier ist DL = DG (15. Erkl.) und
DA = DB (24. Erkl.) folglich wird
AL = BG (3. Gr.) Nun ist aber
BC = BG (15. Erkl.) folglich auch
AL = BC (1. Gr.)

Der 3. Satz.

Aufgabe.

Wenn zwei ungleiche gerade Linien gegeben sind, so soll von der größern ein Stück abgeschnitten werden, welches der kleinern gleich ist.

Es seien (Fig. 3.) AB und C die gegebenen ungleichen Linien, AB die größere, C die kleinere, und man soll von AB einen Theil wegnehmen, welcher so groß als C ist.

Auflösung.

Man lege an A die AD = C (2. S.) und beschreibe aus A mit AD den Kreis DEF.

Beweis.

Da AD = C und auch (15. Erkl.)
AD = AE, so muß auch (1. Gr.) die von AB weggenommene Linie AE der gegebenen Linie C gleich seyn.

Der 4. Satz.

Lehrsatz.

Wenn in zwei Dreiecken zwei Seiten des einen, einzeln genommen, zweien Seiten des andern gleich sind, und der von ihnen eingeschlossene Winkel beiderseits gleich ist, so ist auch die dritte Seite des einen der dritten Seite des andern gleich, und es sind die ganzen Dreiecke, so wie auch jene Winkel, welche gleichen Seiten gegenüberliegen, einander gleich.

Es sei in den Dreiecken (Fig. 4.) ABC und DEF die Seite AB = DE, dann AC = DF und ∢BAC = ∢EDF, so ist auch ∢B = ∢E, ∢C = ∢F, und BC = EF, auch △ ABC = △ DEF.

Beweis.

Man lege das Dreieck ABC so über das Dreieck DEF, daß A auf D, und AB auf DE fällt, so muß auch, da AB = DE ist, B auf E fallen. Da nun ∢BAC = ∢EDF, so fällt AC auf DF und da AC = DF, auch C auf F. Nun fällt nach dem Vorigen auch B auf E, folglich BC auf EF. Denn fiele BC über oder unter EF, so würden die geraden Linien BC und EF einen Raum einschließen, was (12. Gr.) unmöglich ist. Daher ist BC = EF, △ ABC = △ DEF; ∢ABC = ∢DEF, und ∢ACB = ∢DFE (8. Gr.)

Der 5. Satz.

Lehrsatz.

In jedem gleichschenkeligen Dreiecke sind die Winkel an der Grundlinie, und, wenn die gleichen Schenkel verlängert werden, auch die Winkel unter der Grundlinie einander gleich.

Es sei (Fig. 5.) BAC ein gleichschenkeliges Dreieck, worin AB=AC ist, und sowohl AB nach D, als AC nach E verlängert wird, so ist ∢ABC = ∢ACB, und auch ∢CBD = ∢BCE.

Beweis.

Man nehme auf BD den willkührlichen Punct F, mache auf AE die AG = AF (3. S.) und ziehe FC und GB.

Da hier AF = AG, ferner

AC = AB und auch

∢A = ∢A, so ist (4. S.)

FC = GB, ferner

∢ACF = ∢ABG und

∢AFC = ∢AGB. Nun ist aber

AF = AG, dann

AB = AC, und daher

BF = CG (3. Gr.) Folglich ist in den Dreiecken FBC, GCB, BF = CG und FC = GB, sowie auch

∢AFC = ∢AGB. Daher

∢BCF = ∢CBG, und

∢FBC = ∢GCB (4. S.)

Da nun ∢ABG = ∢ACF und

∢CBG = ∢BCF, so ist auch

∢ABC = ∢ACB (3. Gr.)

Der 6. Satz.

Lehrsatz.

Wenn in einem Dreiecke zwei Winkel einander gleich sind, so sind auch die Seiten, welche diesen Winkeln gegenüber liegen, einander gleich.

Es sei ABC (Fig. 6.) das gegebene Dreieck, worin ∢ABC = ∢ACB, so ist auch AC = AB.

Beweis.

Wären die Seiten AB und AC ungleich, so müßte eine größer als die andere seyn. Wäre nun AB > AC, so nehme man DB = AC (3. S.) und ziehe DC.

Nun wäre in den Dreiecken ABC und DBC

BD = CA, ferner

BC = BC und auch

$\frac{\sphericalangle DBC = \sphericalangle ACB.}{\triangle DBC = \triangle ABC}$ Folglich müßte seyn (4. S.), welches aber unmöglich ist (9. Gr.)

Der 7. Satz.

Lehrsatz.

Wenn auf einer geraden Linie in ihren Endpuncten zwei gerade Linien so aufgestellt sind, daß sie in einem Puncte zusammentreffen, und wenn zwei andere gerade Linien, welche, einzeln genommen, den ersten gleich sind, in eben diesen Endpuncten aufgestellt werden, so können sie in keinem andern Puncte an eben dieser Seite zusammentreffen.

Es seien (Fig. 7.) aus den Endpuncten der geraden Linie AB die geraden Linien AC und BC, und dann auch die geraden Linien AD und DB, wovon $AC = AD$ und $BC = BD$ ist, nach der nämlichen Seite hin aufgestellt, so können die beiden letzteren nicht in einem andern Puncte als der Punct C ist, und z. B. in D zusammentreffen.

Beweis.

Wenn man die Linie CD zieht, so ist wegen

$AC = AD$ nun auch

$\sphericalangle ADC = \sphericalangle DCA$ (5. S.) Folglich

$\sphericalangle ADC > \sphericalangle DCB$, daher um so mehr

$\sphericalangle CDB > \sphericalangle DCB$. Nun ist aber

$CB = DB$, folglich auch

$\sphericalangle CDB = \sphericalangle DCB$ (5. S.), welches dem Vorigen, daß $\sphericalangle CDB > \sphericalangle DCB$ ist, widerspricht.

Der 8. Satz.

Lehrsatz.

Wenn in zwei Dreiecken zwei Seiten des einen, einzeln genommen, zweien Seiten des andern gleich

sind, und es ist noch die dritte Seite des ersten der dritten Seite des andern gleich, so ist auch in beiden jener Winkel, welcher von den gleichen Seiten gebildet wird, gleich groß.

Es sei in den Dreiecken (Fig. 8.) ABC und DEF, AB = DE und AC = DF, auch sei BC = EF, so ist auch ∢BAC = ∢EDF.

Beweis.

Man bringe das △ ABC so über das △ DEF, daß B auf E und BC längs EF fällt. Da nun BC = EF, so fällt auch C in F. Nun ist aber auch BA = ED und

CA = FD; daher muß A in D fallen (7. S.) und folglich auch BA in ED und CA in FD, und es ist ∢BAC = ∢EDF (8. Gr.)

Der 9. Satz.

Aufgabe.

Einen gegebenen geradlinigen Winkel in zwei gleiche Theile zu theilen.

Es sei (Fig. 9.) BAC der gegebene Winkel, und es soll derselbe halbirt werden.

Auflösung.

Man nehme in AB den willkührlichen Punct D, und mache AE = AD (3. S.), ziehe DE, und beschreibe auf derselben das gleichseitige △ DFE (1. S.) Wird nun AF gezogen, so ist ∢BAC durch AF halbirt.

Beweis.

Da hier DA = EA, auch
DF = EF und endlich
AF = AF ist, so muß auch
∢DAF = ∢EAF seyn. (8. S.)

Der 10. Satz.

Aufgabe.

Eine gegebene begrenzte gerade Linie zu halbiren.

Es sei AB (Fig. 10.) die gegebene gerade Linie, und man soll diese halbiren.

Auflösung.

Man beschreibe auf AB das gleichseitige Dreieck ACB (1. S.), halbire ∢ACB durch CD (9. S.), so wird die Linie AB in D halbirt seyn.

Beweis.

Weil hier AC = CB, auch
CD = CD und endlich
∢ACD = ∢BCD ist, so muß auch
AD = BD seyn. (4. S.)

Der 11. Satz.

Aufgabe.

Aus einem, in einer gegebenen geraden Linie gegebenen Puncte eine senkrechte Linie auf sie zu errichten.

Es sei (Fig. 11.) AB die gegebene Linie und C der in ihr gegebene Punct, so soll aus ihm ein Loth auf AB errichtet werden.

Auflösung.

Man nehme in AC den willkührlichen Punct D, mache in CB die CE = CD (3. S.), beschreibe auf DE das gleichseitige △DFE (1. S.) und ziehe die FC, so steht diese senkrecht auf AB.

Beweis.

Da hier CD = CE, ferner
CF = CF und endlich auch
DF = EF ist, so muß auch
∢DCF = ∢ECF (8. S.) und folglich auch die CF senkrecht auf AB seyn. (10. Erkl.)

Der 12. Satz.

Aufgabe.

Von einem ausserhalb einer gegebenen unbegrenzten geraden Linie gegebenen Puncte ein Loth auf sie zu ziehen.

Es sei AB (Fig. 12.) die gegebene gerade Linie, C der Punct ausser ihr, und man soll von C auf AB eine senkrechte Linie ziehen.

Auflösung.

Man nehme auf der andern Seite von AB einen beliebigen Punct D, beschreibe aus C mit der Weite CD den Kreis EFG, halbire GE in H (10. S.), und ziehe die Linie CH, so ist diese senkrecht auf AB.

Beweis.

Wenn man die Linien CG und CE zieht, so ist

GH = EH, ferner

CH = CH und endlich

GC = EC (15. Erkl.) Folglich

$\sphericalangle$ GHC = $\sphericalangle$ EHC. (8. S.) Daher denn die CH senkrecht auf AB. (10. Erkl.)

Der 13. Satz.

Lehrsatz.

Wenn eine gerade Linie so auf einer andern aufgestellt ist, daß sie mit ihr zwei Winkel bildet, so sind diese Winkel entweder, einzeln genommen, zwei Rechte, oder sie sind zusammengenommen zweien Rechten gleich.

Es sei auf der geraden CD (Fig. 13.) die gerade BA so aufgestellt, daß sie mit ihr die Winkel DBA und ABC bildet, so ist entweder jeder dieser Winkel ein Rechter, oder sie betragen zusammen zwei rechte Winkel (oder 2R).

Beweis.

Wenn der Winkel DBA dem Winkel ABC gleich ist, so sind sie zwei Rechte (10. Erkl.) Sind sie aber ungleich, so errichte man die BE aus B auf DC lothrecht (11. S.), so ist sowohl DBE, als EBC ein rechter Winkel. (10. Erkl.)

Nun ist $\sphericalangle$ CBE = $\sphericalangle$ CBA + $\sphericalangle$ ABE und

$\sphericalangle$ EBD = $\sphericalangle$ EBD, folglich

$\sphericalangle$ CBE + $\sphericalangle$ EBD = $\sphericalangle$ CBA + $\sphericalangle$ ABE + $\sphericalangle$ EBD. (3. Gr.)

Weil nun ∢ABD = ∢DBE + ∢EBA, so ist ∢ABD + ∢CBA = ∢DBE + ∢EBA + ∢ABC. Daher auch ∢ABD + ∢CBA = ∢CBE + ∢EBD = 2R. (1. Gr.)

Der 14. Satz.

Lehrsatz.

Wenn mit einer geraden Linie in einem Puncte derselben zwei andere, nicht nach der nämlichen Seite liegende gerade Linien zwei neben einander liegende Winkel bilden, welche zweien Rechten gleich sind, so liegen diese beiden geraden Linien in einer einzigen geraden.

Wenn (Fig. 14.) mit der geraden Linie AB die zwei geraden Linien BC und BD die neben einander liegenden Winkel ABC und ABD bilden, und diese zusammengenommen zwei rechte Winkel betragen, so muß BD und BC in einer geraden Linie CBD liegen.

Beweis.

Wäre CBD keine gerade Linie, so sei es irgend eine andere z. B. CBE. Hier wäre nun (13. S.)

∢ABC + ∢ABE = 2R. Allein es ist auch
∢ABC + ∢ABD = 2R nach der Annahme; also
∢ABC + ∢ABE = ∢ABC + ∢ABD (1. Gr.), allein
∢ABC = ∢ABC, folglich wäre
∢ABE = ∢ABD (3. Gr.), welches aber unmöglich ist. (9. Gr.)

Der 15. Satz.

Lehrsatz.

Wenn sich zwei gerade Linien durchschneiden, so bilden sie gleiche Scheitelwinkel.

Wenn sich (Fig. 15.) die Linien AB und CD im Puncte E schneiden, so ist ∢AED = ∢CEB, und ∢AEC = ∢DEB.

Beweis.

Da hier ∢CEA + ∢AED = 2R, und
∢AED + ∢DEB = 2R (13. S.), so ist auch
∢CEA + ∢AED = ∢AED + ∢DEB (1. Gr.)
Nun ist aber ∢AED = ∢AED, folglich auch
∢CEA = ∢DEB. (3. Gr.)

Ganz auf ähnliche Art wird bewiesen, daß ∢CEB = ∢AED ist.

Zusatz.

Hieraus geht hervor, daß alle Winkel, welche rings um den gemeinschaftlichen Durchschnittspunct mehrerer geraden Linien liegen, zusammengenommen 4R betragen.

Der 16. Satz.

Lehrsatz.

Wenn man die Seite eines Dreiecks verlängert, so ist der Aussenwinkel größer, als jeder seiner innern Gegenwinkel.

Wenn ABC (Fig. 16.) das gegebene Dreieck und BCD die verlängerte Seite BD ist, so muß der Aussenwinkel ACD größer, als jeder seiner zwei Gegenwinkel CBA und BAC seyn.

Beweis.

Man halbire AC in E (10. S.) ziehe BE und verlängere sie, bis EF = EB ist. Auch ziehe man FC.

Da nun hier BE = EF, ferner
AE = EC und auch
∢AEB = ∢CEF, (15. S.) so ist auch
∢BAE = ∢FCE (4. S.).
Nun ist aber ∢ACD > ∢ECF (9. Gr.) Daher auch
∢ACD > ∢BAC.

Auf ähnliche Art kann auch BC halbirt und bewiesen werden, daß der Winkel BCG, das heißt der Winkel ACD, (15. S.) größer als der Winkel CBA ist.

Der 17. Satz.

Lehrsatz.

In jedem Dreiecke sind jede zwei Winkel zusammengenommen kleiner, als zwei Rechte.

Es sei ABC (Fig. 17.) ein gegebenes Dreieck, so sind jede zwei Winkel desselben zusammen kleiner, als zwei Rechte.

Beweis.

Wenn man die Seite BC nach D verlängert, so ist

$\measuredangle ACD > \measuredangle ABC$ (16. S.) oder

$\measuredangle ABC < \measuredangle ACD$. Da nun

$\measuredangle ACB = \measuredangle ACB$, so ist auch

$\measuredangle ABC + \measuredangle ACB < \measuredangle ACD + \measuredangle ACB$ (4. Gr.)

Allein $\measuredangle ACD + \measuredangle ACB = 2R$ (13. S.), daher auch

$\measuredangle ABC + \measuredangle ACB < 2R$.

Auf ganz ähnliche Art wird die Behauptung auch von

$\measuredangle BAC + \measuredangle ACB$ und von

$\measuredangle CAB + \measuredangle ABC$ bewiesen.

Der 18. Satz.

Lehrsatz.

In jedem Dreiecke steht der größern Seite auch der größere Winkel gegenüber.

Es sei in dem Dreiecke ACB (Fig. 18.) die Seite $AC > AB$, so ist auch der Winkel ABC größer als der Winkel ACB.

Beweis.

Da $AC > AB$, so nehme man $AD = AB$ (3. S.) und ziehe BD, wodurch $\measuredangle ADB = \measuredangle ABD$ ist. (5. S.) Nun ist aber auch $\measuredangle ADB > ACB$ (16. S.), daher

$\measuredangle ABD > ACB$. Allein

$\measuredangle ABC > ABD$, folglich um so mehr

$\measuredangle ABC > \measuredangle ACB$.

Der 19. Satz.

Lehrsatz.

In jedem Dreiecke steht dem größern Winkel auch die größere Seite gegenüber.

Es sei in dem Dreiecke ABC (Fig. 19.) der Winkel ABC $>$ ∡BCA, so ist auch die Seite AC $>$ AB.

Beweis.

Wäre die Seite AC nicht größer als AB, so müßte entweder

AC $=$ AB oder

AC $<$ AB seyn. Im ersten Falle wäre auch ∡ABC $=$ ∡ACB (5. S.) Und im zweiten Falle müßte ∡ABC $<$ ∡ACB seyn (18. S.), welches beides der Annahme, daß ∡ABC $>$ ∡ACB ist, widerspricht.

Der 20. Satz.

Lehrsatz.

In jedem Dreiecke sind je zwei Seiten zusammengenommen größer, als die dritte.

Es sei (Fig. 20.) ABC das gegebene Dreieck, so sind je zwei Seiten desselben zusammengenommen größer, als die dritte.

Beweis.

Wenn man die Seite BA über A verlängert, AD $=$ AC macht und DC zieht, so ist wegen

AD $=$ AC nun auch

∡ACD $=$ ∡ADC (5. S.) folglich

∡BCD $>$ ∡ADC und daher auch

BD $>$ BC (19. S.) Es ist aber

BD $=$ BA $+$ AC, daher auch

BA $+$ AC $>$ BC.

Auf ähnliche Art wird bewiesen, daß AB $+$ BC $>$ AC und daß BC $+$ CA $>$ AB ist.

Der 21. Satz.

Lehrsatz.

Wenn zwei von den Endpuncten einer Dreiecksseite ausgehende gerade Linien sich innerhalb des Dreiecks durchschneiden, so sind sie zusammengenommen kleiner, als die beiden übrigen Seiten des Dreiecks; bilden aber einen größern Winkel, als diese.

Es seien aus den Puncten B und C (Fig. 21.) der Dreiecksseite BC die Linien BD und CD gezogen, welche innerhalb des Dreiecks ABC sich in D schneiden, so ist $BD + DC < BA + AC$ und $\sphericalangle BDC > \sphericalangle BAC$.

Beweis

Wenn man die Linie BD bis E verlängert, so ist im Dreiecke ABE

$BA + AE > EB$ (20. S.) Da nun
$EC = EC$, so muß auch
$BA + AC > BE + EC$ seyn.

Ferner ist im Dreiecke CDE

$CE + ED > CD$ (20. S.) Und da
$DB = DB$, so ist auch
$CE + EB > CD + DB$, folglich um so mehr
$BA + AC > CD + DB$.

Weil nun $\sphericalangle BDC > BEC$ (16. S.) und
$\sphericalangle BEC > \sphericalangle BAC$ (16. S.) so ist um so mehr
$\sphericalangle BDC > \sphericalangle BAC$.

Der 22. Satz.

Aufgabe.

Aus drei geraden Linien, welche dreien gegebenen einzeln genommen gleich, und wovon je zwei zusammen größer als die dritte sind, ein Dreieck zu bilden.

Es seien (Fig. 22.) A, B und C die drei gegebenen Linien, und es sei $A + B > C$, ferner $A + C > B$ und $B + C > A$. Man soll mit diesen drei Seiten ein Dreieck bilden.

Auflösung.

Man ziehe eine gerade Linie DE von unbestimmter Länge, nehme $DF = A$, $FG = B$ und $GH = C$. Nun beschreibe man aus F mit FD den Kreis DKL und aus G mit GH den Kreis HLK, ziehe sodann die geraden Linien KF und KG, so ist KGF das verlangte Dreieck.

Beweis.

Hier ist nämlich $FD = FK$ und $GH = GK$ (15. Erkl.) Da aber $FD = A$ und $GH = C$, so muß auch

$FK = A$ und

$KG = C$ seyn. (1. Gr.)

Nun ist auch $FG = B$. Daher sind die drei Seiten des Dreiecks KGF den gegebenen Linien A, B und C, einzeln genommen gleich.

Der 23. Satz.

Aufgabe.

An einer gegebenen geraden Linie und einem in ihr gegebenen Puncte einen geradlinigen Winkel zu bilden, welcher einem gegebenen gleich ist.

Es sei AB (Fig. 23.) die gegebene gerade Linie, A der in ihr gegebene Punct und DCE der gegebene Winkel.

Man soll aus A eine Linie AF ziehen, welche mit AB den Winkel DCE bildet.

Auflösung.

Man nehme sowohl auf CE als auf CD einen willkührlichen Punct D und E, und ziehe DE. Nun bilde man ein Dreieck AFG, worin $AF = CD$, $AG = CE$ und $FG = DE$ ist (22. S.), so wird auch $\measuredangle FAG = \measuredangle DCE$ seyn.

Beweis.

Da in den beiden Dreiecken ECD und GAF die Seite

$CE = AG$, ferner

$CD = AF$ und endlich

ED = GF ist, so muß auch
∢ECD = ∢GAF seyn (8. S.)

Der 24. Satz.

Lehrsatz.

Wenn in zwei Dreiecken die zwei Seiten des einen, einzeln genommen, den zwei Seiten des andern gleich sind; aber der von jenen eingeschlossene Winkel größer, als der von diesen gebildete ist, so ist auch die dritte Seite des ersten Dreiecks größer als die dritte Seite des andern.

Es seien (Fig. 24.) BAC und EDF die gegebenen Dreiecke, worin BA = ED, AC = DF und ∢BAC > ∢EDF ist, so muß auch BC > EF seyn.

Beweis.

Da ∢BAC > ∢EDF, so mache man ∢EDG = ∢BAC (23. S.) so wie auch DG = AC = DF und ziehe die Linien GE und GF.

Da nun hier AB = DE, ferner
AC = DG und endlich
∢BAC = ∢EDG, so ist auch
BC = EG (4. S.) Nun ist aber
DG = DF und daher
∢DFG = ∢DGF (5. S.) folglich auch
∢DFG > ∢EFG und daher um so mehr noch
∢EFG > ∢EGF und also auch
EG > EF (19. S.) oder
BC > EF.

Der 25. Satz.

Lehrsatz.

Wenn in zwei Dreiecken zwei Seiten des einen, einzeln genommen, zweien Seiten des andern gleich sind; aber die dritte Seite des ersten größer ist,

als die dritte Seite des andern, so ist auch der dieser größern Seite gegenüberstehende Winkel größer, als der Winkel, welcher der kleinern Seite gegenüberliegt.

Es seien (Fig. 25) ABC und DEF die zwei Dreiecke, worin $AB = DE$, $AC = DF$ und $BC > EF$ ist, so muß $\sphericalangle BAC > \sphericalangle EDF$ seyn.

Beweis.

Wäre hier $\sphericalangle BAC$ nicht größer, als $\sphericalangle EDF$, so müßte entweder

$\sphericalangle BAC = \sphericalangle EDF$ oder
$\sphericalangle BAC < \sphericalangle EDF$ seyn.

Im ersteren Falle wäre nun auch $BC = EF$ (4. S.) und im zweiten Falle wäre $BC < EF$ (24. S.) welches beides der Annahme, daß $BC > EF$ ist, widerspricht.

Der 26. Satz.

Lehrsatz.

Wenn in zwei Dreiecken zwei Winkel des einen, einzeln genommen, zweien Winkeln des andern gleich sind, und es ist noch eine Seite des einen einer Seite des andern gleich, sie mag an den gleichen Winkeln oder einem derselben gegenüber liegen, so sind auch die übrigen Seiten in den beiden Dreiecken, einzeln genommen, einander gleich, und der dritte Winkel des einen ist dem dritten Winkel des andern gleich.

Es seien (Fig. 26.) ABC und DEF die zwei Dreiecke, worin $\sphericalangle ABC = \sphericalangle DEF$, und $\sphericalangle BCA = \sphericalangle EFD$, auch sei

für den ersten Fall

$BC = EF$, so ist auch $AB = DE$, $AC = DF$, und $\sphericalangle BAC = \sphericalangle EDF$.

Beweis.

Wären die Seiten AB und DE ungleich, so sei z. B. $AB > DE$. Man mache $GB = DE$ (3. S.) und ziehe GC.

Da nun hier BG = ED, ferner
BC = EF und auch
∢GBC = ∢DEF, so ist
∢BCG = ∢EFD (4. S.) Nun ist aber
∢BCA = ∢EFD nach der Annahme,
folglich wäre ∢BCA = ∢BCG, welches unmöglich ist (9. Gr.)

Da nun ferner AB = DE und
BC = EF, endlich auch
∢ABC = ∢DEF, so ist
AC = DF und
∢BAC = ∢EDF (4. S.) Es sei nun
für den zweiten Fall
AB = DE, so ist auch AC = DF, BC = EF und ∢BAC = ∢EDF.

Beweis.

Denn wenn BC und EF ungleich wären, so müßte eine größer, als die andere und z. B. BC > EF seyn. Man nehme daher BH = EF und ziehe AH.

Da nun hier BH = EF, auch
AB = DE und endlich
∢ABC = ∢DEF, so ist (4. S.)
∢BHA = ∢EFD. Nun war aber nach der Annahme ∢BCA = ∢EFD; daher wäre auch ∢BHA = ∢BCA, welches unmöglich ist (16. S.)

Da nun auch BC = EF, ferner
AB = DE und endlich
∢ABC = ∢DEF, so ist auch
AC = DF und
∢BAC = ∢EDF (4. S.)

Der 27. Satz.

Lehrsatz.

Wenn zwei gerade Linien so von einer dritten geschnitten werden, daß die Wechselwinkel einander gleich sind, so müssen die zwei geraden Linien mit einander parallel seyn.

Es werden die zwei geraden Linien AB und CD (Fig. 27.) von der dritten EF so geschnitten, daß die Wechselwinkel AEF und EFD einander gleich sind, so muß AB mit CD parallel seyn.

Beweis.

Wäre AB nicht mit CD parallel, so müßten sie, nach einer Seite hin genugsam verlängert, einmal zusammenlaufen. Gesetzt, dieß geschehe in G, so entstände ein Dreieck EFG, in welchem ∠AEF > ∠EFD wäre (16. S.), welches der Annahme, daß ∠AEF = ∠EFD ist, widerspricht.

Auf ähnliche Art wird gezeigt, daß die geraden Linien BA und DC, wenn sie über A und C verlängert werden, sich auch hier nie durchschneiden können.

Der 28. Satz.

Lehrsatz.

Wenn zwei gerade Linien so von einer dritten geschnitten werden, daß der äussere Winkel seinem innern, an einerlei Seite liegenden Gegenwinkel gleich ist, oder daß die beiden innern, an einerlei Seite liegenden Winkel zusammen zweien Rechten gleich sind, so müssen die zwei geraden Linien auch parallel seyn.

Es werden die zwei geraden Linien AB und CD (Fig. 28.) so von der dritten EF geschnitten, daß der äussere Winkel EGB seinem innern GHD gleich ist, oder daß die beiden innern Winkel BGH und GHD zusammen zwei Rechte betragen, so ist AB mit CD parallel.

Beweis.

I. Da nach der Annahme ∠EGB = ∠GHD
und auch ∠EGB = ∠AGH (15. S.),
so ist (1. Gr.) ∠AGH = ∠GHD und es muß die Linie AB mit CD parallel seyn (27. Satz.)

II. Da nach der Annahme
∠BGH + ∠GHD = 2R, und auch
∠AGH + ∠BGH = 2R (13. S.), so ist auch
∠BGH + ∠GHD = ∠AGH + ∠BGH (1. Gr.)

Da nun $\sphericalangle BGH = \sphericalangle BGH$, so ist
$\sphericalangle AGH = \sphericalangle GHD$ (3. Gr.)
Und es muß daher AB mit CD parallel seyn (27. S.)

Der 29. Satz.

Lehrsatz.

Wenn zwei gleichlaufende Linien von einer dritten geraden Linie geschnitten werden, so sind die hierdurch entstehenden Wechselwinkel einander gleich; auch ist der äussere seinem innern Gegenwinkel gleich, und die beiden innern, an einerlei Seite liegenden Winkel sind zusammengenommen zweien Rechten gleich.

Es seien die Linien AB und CD (Fig. 29.), welche von der dritten EF in G und H geschnitten werden, mit einander parallel, so ist $\sphericalangle AGH = \sphericalangle GHD$, ferner
$\sphericalangle EGB = \sphericalangle GHD$ und endlich
$\sphericalangle BGH + \sphericalangle GHD = 2R$.

Beweis.

I. Wenn $\sphericalangle AGH$ und $\sphericalangle GHD$ nicht unter sich gleich wären, so sei z. B.
$\sphericalangle AGH > \sphericalangle GHD$. Da nun
$\sphericalangle BGH = \sphericalangle BGH$, so müßte auch
$\sphericalangle AGH + \sphericalangle BGH > \sphericalangle GHD + \sphericalangle BGH$ seyn (4. Gr.)
Nun ist aber $\sphericalangle AGH + \sphericalangle BGH = 2R$ (13. S.) Daher wäre $\sphericalangle GHD + \sphericalangle BGH < 2R$, und die Linien AB und CD müßten, gehörig verlängert, einmal zusammentreffen (11. Gr.) und wären daher nicht mit einander parallel (35. Erkl.), welches der Annahme, daß sie gleichlaufende sind, widerspricht.

II. Da hier $\sphericalangle AGH = \sphericalangle GHD$ und auch
$\sphericalangle AGH = \sphericalangle EGB$ (15. S.), so muß auch
$\sphericalangle EGB = \sphericalangle GHD$ seyn (1. Gr.)

III. Da ferner $\sphericalangle EGB = \sphericalangle GHD$ und auch
$\sphericalangle BGH = \sphericalangle BGH$, so ist (2. Gr.)
$\sphericalangle EGB + \sphericalangle BGH = \sphericalangle GHD + \sphericalangle BGH$.

Nun ist aber $\measuredangle EGB + \measuredangle BGH = 2R$ (13. S.)
Folglich auch $\measuredangle GHD + \measuredangle BGH = 2R$ (1. Gr.)

Der 30. Satz.

Lehrsatz.

Zwei gerade Linien, welche mit der nämlichen dritten geraden parallel sind, müssen auch unter sich selbst gleichlaufend seyn.

Es sei (Fig. 30.) sowohl die gerade AB, als auch die gerade CD mit der geraden EF parallel, so ist auch AB mit CD gleichlaufend.

Beweis.

Wenn die drei Linien AB, EF und CD von der dritten MN geschnitten werden, so ist, weil AB und EF gleichlaufend sind,

$\measuredangle AGH = \measuredangle GHF$ (29. S.)

Nun ist aber auch, weil EF mit CD parallel ist,

$\measuredangle GHF = \measuredangle GKD$ (29. S.)

Daher muß auch $\measuredangle AGH = \measuredangle GKD$ (1. Gr.) und folglich AB mit CD parallel seyn (27. S.)

Der 31. Satz.

Aufgabe.

Durch einen gegebenen Punct eine gerade Linie zu ziehen, welche mit einer gegebenen geraden gleichlaufend ist.

Es sei A (Fig. 31.) der gegebene Punct, BC die gegebene gerade Linie, und man soll durch A eine mit BC gleichlaufende bilden.

Auflösung.

Man nehme in BC den willkührlichen Punct D, ziehe AD und lege an A den Winkel DAE, welcher dem Winkel ADC gleich ist (23. S.), dann verlängere man die EA nach F hin.

Beweis.

Da hier nach der Construction $\measuredangle EAD = \measuredangle ADC$ ist, so muß auch die gerade EF mit der geraden BC parallel seyn (27. S.)

Der 32. Satz.

Lehrsatz.

Wenn man die Seite eines Dreiecks verlängert, so ist der Aussenwinkel so groß, als seine zwei innere Gegenwinkel zusammengenommen. Auch sind die drei innern Winkel des Dreiecks zusammen zweien Rechten gleich.

Es sei ABC (Fig. 32.) das gegebene Dreieck und BC nach D verlängert, so ist $\measuredangle ACD = \measuredangle CAB + \measuredangle ABC$. Ferner ist auch $\measuredangle ABC + \measuredangle BCA + \measuredangle CAB = 2R$.

Beweis.

I. Wenn man durch C die Linie CE mit BA gleichlaufend zieht (31. S.), so ist

$\measuredangle BAC = \measuredangle ACE$ (29. S.) und ferner

$\measuredangle ABC = \measuredangle ECD$ (29. S.), daher auch

$\measuredangle BAC + \measuredangle ABC = \measuredangle ACE + \measuredangle ECD$. Allein

$\measuredangle ACE + \measuredangle ECD = \measuredangle ACD$. Daher auch

$\measuredangle BAC + \measuredangle ABC = \measuredangle ACD$ (2. Gr.)

II. Da hier $\measuredangle BAC + \measuredangle ABC = \measuredangle ACD$, auch $\measuredangle ACB = \measuredangle ACB$, so ist auch

$\measuredangle BAC + \measuredangle ABC + \measuredangle ACB = \measuredangle ACD + \measuredangle ACB$.

(2. Gr.) Allein $\measuredangle ACD + \measuredangle ACB = 2R$ (13. S.) Daher auch $\measuredangle BAC + \measuredangle ABC + \measuredangle ACB = 2R$ (1. Gr.)

Der 33. Satz.

Lehrsatz.

Wenn zwei gerade Linien unter sich gleich und parallel sind, so sind auch jene gerade Linien, welche ihre Endpuncte an einerlei Seite verbinden, einander gleich und parallel.

Es seien (Fig. 33.) die Linien BA und DC einander gleich und parallel, so sind auch die Verbindungslinien BD und AC einander gleich und parallel.

Beweis.

Wenn man die gerade BC zieht, so ist, weil BA mit DC gleichlaufend ist,

∢ABC = ∢BCD (29. S.) Da nun
AB = DC und auch
BC = BC, so muß
AC = DB und
∢ACB = ∢DBC seyn (4. S.) Daher ist auch AC mit BD gleichlaufend (27. S.)

Der 34. Satz.

Lehrsatz.

In jedem Parallelogramme sind die gegenüberstehenden Seiten und die gegenüberstehenden Winkel einander gleich. Auch wird dasselbe von der Diagonale halbirt.

Es sei (Fig. 34.) BACD das Parallelogramm und BC seine Diagonale, so ist BA = DC, BD = AC, ∢DBA = ∢DCA, ∢BDC = ∢BAC, und △ABC = △BCD.

Beweis.

I. Da sowohl AB mit CD, als auch BD mit AC parallel ist, so muß

∢ABC = ∢BCD und
∢ACB = ∢CBD seyn. (29. S.)

Nun ist auch BC = BC, daher
AB = CD (26. S.)
AC = BD und
∢BAC = ∢BDC.

Auch ist, weil ∢ABC = ∢BCD und
∢CBD = ∢ACB, nun auch
∢ABC + ∢CBD = ∢BCD + ∢ACB (2. Gr.)
Folglich ∢ABD = ∢ACD.

II. Da ferner AB = CD, dann
BC = BC, und endlich
∢ABC = ∢BCD, so ist auch
△ABC = △CBD (4. S.)

Der 35. Satz.

Lehrsatz.

Wenn Parallelogramme auf einerlei Grundlinie und zwischen einerlei Parallellinien stehen, so sind sie einander gleich.

Es seien die Parallelogramme (Fig. 35.) ADCD und EFCB auf der nämlichen Grundlinie BC und zwischen den nämlichen Parallelen AF und BC, so ist das Parallelogramm ADCB dem Parallelogramme EFCB gleich.

Beweis.

Hier ist BC = AD, ferner
BC = EF (34. S.) Folglich
AD = EF (1. Gr.) Da nun
DE = DE, so ist
AE = DF (2. Gr.) Nun ist ferner
AB = DC (34. S.) und
∢FAB = ∢FDC (29. S.) Daher
△ABE = △DCF (4. S.) Da nun
△EDG = △EDG, so wird
ABGD = EGCF (3. Gr.), es ist aber
△GBC = △GBC, folglich auch
ABCD = EBCF (2. Gr.)

Der 36. Satz.

Lehrsatz.

Parallelogramme, welche auf gleichen Grundlinien und zwischen einerlei Parallelen stehen, sind einander gleich.

Es seien die Parallelogramme (Fig. 36.) ABCD und EFGH auf gleichen Grundlinien BC und FG, und zwischen den Parallelen AH und BG, so sind diese zwei Parallelogramme einander gleich.

Beweis.

Wenn man die Linien BE und CH zieht, so ist

BC = FG auch
FG = EH (34. S.) Daher denn
BC = EH (1. Gr.)

Da nun auch BC mit EH gleichlaufend ist, so muß auch EB der CH gleich und parallel seyn (33. S.) Daher ist EHCB ein Parallelogramm, und

ABCD = EBCH (35. S.), allein
EFGH = EBCH (35. S.) Daher
ABCD = EFGH (1. Gr.)

Der 37. Satz.

Lehrsatz.

Wenn zwei Dreiecke auf einerlei Grundlinie und zwischen einerlei Parallelen stehen, so sind sie einander gleich.

Es seien (Fig. 37.) die Dreiecke ABC und DBC auf einerlei Grundlinie BC und zwischen einerlei Parallelen AD und BC, so ist △ ABC = △ DBC.

Beweis.

Wenn man die gerade AD über A und D verlängert, durch B die BE mit CA und durch C die CF mit BD parallel zieht (31. S.), so sind die Parallelogramme EBCA und DBCF einander gleich (35. S.). Nun ist aber auch Dreieck ABC die Hälfte des Parallelogramms EACB und das Dreieck DBC die Hälfte des Parallelogramms DBCF (34. S.), folglich müssen auch diese Dreiecke einander gleich seyn. (7. Gr.)

Der 38. Satz.

Lehrsatz.

Wenn zwei Dreiecke auf gleichen Grundlinien und zwischen einerlei Parallellinien stehen, so sind sie einander gleich.

Es seien (Fig. 38.) die Dreiecke ABC und DEF auf den gleichen Grundlinien BC und EF, auch zwischen einerlei Parallelen AD und BF, so ist △ ABC = △ DEF.

Beweis.

Wenn man die AD über A und D verlängert, durch B die BG mit CA und durch F die FH mit ED parallel zieht (31. S.), so sind die Parallelogramme GBCA und DEFH einander gleich (36. S.). Nun ist aber das Dreieck ABC die Hälfte von GACB und das Dreieck DEF die Hälfte von DHFE (34. S.), folglich ist auch $\triangle ABC = \triangle DEF$ (7. Gr.)

Der 39. Satz.

Lehrsatz.

Wenn zwei gleiche Dreiecke nach der nämlichen Seite auf einerlei Grundlinie stehen, so sind sie auch zwischen einerlei Parallelen.

Es seien die gleichen Dreiecke (Fig. 39.) ABC und DBC auf einerlei Grundlinie BC und auf einerlei Seite von derselben, so muß die Linie AD, welche ihre Spitzen verbindet, mit BC parallel seyn.

Beweis.

Wenn die Linie AD nicht parallel mit BC ist, so muß eine andere durch A gezogene mit BC gleichlaufend seyn. Wäre nun AE diese mit BC parallele Linie, so müßte, wenn EC gezogen wird,

$\triangle ABC = \triangle EBC$ seyn (37. S.)

Nun ist aber $\triangle ABC = \triangle DBC$ nach der Annahme, folglich wäre $\triangle DBC = \triangle EBC$, welches unmöglich ist (9. Gr.)

Der 40. Satz.

Lehrsatz.

Wenn gleiche Dreiecke auf gleichen Grundlinien stehen und auf einerlei Seite derselben liegen, so ist die Verbindungslinie ihrer Spitzen parallel mit den Grundlinien.

Es seien (Fig. 40.) die gleichen Dreiecke ABC und DCE auf den gleichen Grundlinien BC und CE, auch auf einerlei

Seite von derselben, so muß die Verbindungslinie AD mit BE parallel seyn.

Beweis.

Wenn die AD nicht mit BE parallel wäre, so sei AF mit BE gleichlaufend. Zieht man nun FE, so wäre $\triangle ABC = \triangle FCE$ (38. S.) Allein es ist auch $\triangle ABC = \triangle DCE$ nach der Annahme, folglich wäre $\triangle DCE = \triangle FCE$ (1. Gr.), welches widersprechend ist (9. Gr.)

Der 41. Satz.

Lehrsatz.

Wenn ein Parallelogramm mit einem Dreiecke auf einerlei Grundlinie steht, und beide in einerlei Parallelen liegen, so ist das Parallelogramm das Doppelte des Dreiecks.

Es sei (Fig. 41.) das Parallelogramm ABCD mit dem Dreiecke EBC auf einerlei Grundlinie BC, und die Linie ADE sei parallel mit BC, so ist das Parallelogramm ABCD das Doppelte des Dreiecks EBC.

Beweis.

Wenn man die Diagonale AC zieht, so ist $\triangle ABC = \triangle EBC$ (37. S.) Nun ist aber $ABCD = 2\triangle ABC$ (34. S.) Daher muß auch $ABCD = 2\triangle EBC$ seyn.

Der 42. Satz.

Aufgabe.

Es ist ein Dreieck gegeben, und man soll ein Parallelogramm bilden von einem gegebenen Winkel, welches jenem Dreiecke gleich ist.

Es sei (Fig. 42.) ABC das gegebene Dreieck und D der gegebene Winkel. Man soll ein Parallelogramm bilden, welches dem gegebenen Dreiecke gleich ist und worin sich der Winkel D befindet.

Auflösung.

Man halbire BC in E (10. S.) und ziehe die AE, setze hierauf an E den Winkel $CEF = \measuredangle D$ (23. S.) und ziehe durch A die

AG mit BC und durch C die CG mit FE parallel (31. S.), so ist FECG das verlangte Parallelogramm.

Beweis.

Hier ist △ ABE = △ AEC (38. S.), folglich △ ABC = 2△ AEC. Allein es ist FECG = 2△ AEC (41. S.), folglich △ ABC = FECG (6. Gr.)

Der 43. Satz.

Lehrsatz.

In jedem Parallelogramme sind die Ergänzungen der um die Diagonale liegenden Parallelogramme einander gleich.

Es sei (Fig. 43.) ABCD das gegebene Parallelogramm und AC seine Diagonale, um welche die Parallelogramme EH und GF liegen, deren Ergänzungen BK und KD sind, so ist BK = KD.

Beweis.

Da △ ABC = △ CAD (34. S.) und ebenso △ AEK = △ AHK, so ist EKCB = KHDC (3. Gr.) Nun ist aber △ KGC = △ KCF (34. S.) Daher muß BK = KD seyn (3. Gr.)

Der 44. Satz.

Aufgabe.

Auf einer gegebenen geraden Linie ein Parallelogramm zu bilden, welches einem gegebenen Dreiecke gleich ist und worin sich ein gegebener Winkel befindet.

Es sei AB (Fig. 44.) die gegebene Linie, C das gegebene Dreieck und D der gegebene Winkel. Man soll auf AB unter dem Winkel D ein Parallelogramm bilden, welches dem Dreiecke C gleich ist.

Auflösung.

Man bilde ein Parallelogramm BEFG = △ C (42. S.) so, daß ∠ EBG = ∠ D ist, und lege dasselbe so an die gegebene

Linie AB, daß AB und BE eine einzige gerade Linie bilden. Nun ziehe man durch A die AH mit EF parallel (31. S.), verlängere FG bis H, und ziehe HB, so ist ∢ AHF + EFH = 2R (29. S.) Daher ∢ BHF + ∢ EFH < 2R, und die Linien HB und FE müssen über B und E hinlänglich verlängert einmal zusammentreffen (11. Gr.) Wenn dieß in K geschieht, so ziehe man durch K die KL mit FH parallel (31. S.), so ist HLKF ein Parallelogramm.

Beweis.

Hier ist in dem Parallelogramme HLKF die Linie KH Diagonale, um welche die Parallelogramme AG und ME liegen, deren Ergänzungen LB und BF sind. Daher ist nun LB = BF (43. S.) Es ist aber BF = △ C, folglich auch

LB = △ C (1. Gr.)

Da nun ∢ GBE = ∢ ABM = ∢ D (15. S.), so ist auch ∢ ABM = ∢ D.

Der 45. Satz.

Aufgabe.

Wenn eine geradlinige Figur gegeben ist, so soll ein Parallelogramm gebildet werden, welches ihr gleich ist, und einen gegebenen Winkel enthält.

Es sei (Fig. 45.) ABCD die gegebene geradlinige Figur, und E der gegebene Winkel. Man soll ein Parallelogramm bilden, welches der Figur ABCD gleich ist und den Winkel E enthält.

Auflösung.

Man ziehe DB und mache unter dem Winkel HKF = ∢ E ein Parallelogramm FH, welches dem Dreiecke ADB gleich ist (42. S.) Dann bilde man auf GH ein Parallelogramm GM, welches dem Dreiecke DBC gleich ist, und einen Winkel GHM = ∢ E enthält (44. S.)

Beweis.

Da ∢ FKH = ∢ E, und ferner
∢ GHM = ∢ E, so ist auch
∢ GHM = ∢ FKH (1. Gr.) Da nun

∡GHK = ∡GHK, so wird auch
∡GHM + ∡GHK = ∡FKH + ∡GHK = 2R (29. S.)
Daher liegen KH und HM in einer geraden Linie KM (24. S.)
Da nun FG mit KM gleichlaufend ist, so hat man
∡FGH = ∡GHM (29. S.) Da ferner
∡LGH = ∡LGH, so ist auch
∡FGH + ∡LGH = ∡GHM + ∡LGH = 2R (29. S.)
Daher liegen auch FG und GL in einer geraden Linie FL (14. S.)

Da nun ferner FK und GH, sowie auch GH und LM einander gleich und parallel sind (34. S.), so ist auch FK der LM gleich und parallel (30. S.) Daher sind auch FL und KM gleich und parallel (33. S.), und es muß KFLM ein Parallelogramm seyn, worin ∡FKM = ∡E ist.

Da endlich FH = △ ABD, und ebenso
GM = △ DBC, so muß auch
KFLM = ABCD seyn (2. Gr.)

Der 46. Satz.

Aufgabe.

Es ist eine gerade Linie gegeben, und man soll ihr Quadrat auf ihr bilden.

Es sei AB (Fig. 46.) die gegebene Linie, und es soll das Quadrat von AB auf derselben gebildet werden.

Auflösung.

Man errichte in A auf BA die AC senkrecht (11. S.) und mache AD = AB. Sodann ziehe man durch D die DE mit AB, und durch B die BE mit AD parallel (31. S.)

Beweis.

Nach der Construction ist ADEB ein Parallelogramm, folglich
AB = DE (34. S.) Aber es ist auch
AB = AD, folglich ist
AB = AD = DE = EB und das Parallelogramm ADEB ist gleichseitig.

Da nun AB und DE parallel sind, so ist ∡BAD + ∡ADE = 2R (29. S.) Allein es ist ∡BAD = R, folglich auch
∡ADE = R.

Da nun in Parallelogrammen die gegenüberliegenden Winkel einander gleich sind (34. S.), so ist auch ∢ ABE = ∢ BED = R und folglich ADEB auch rechtwinkelig. Daher muß ADEB ein Quadrat seyn (30. Erkl.)

Der 47. Satz.

Lehrsatz.

In jedem rechtwinkeligen Dreiecke ist das Quadrat, welches über der, dem rechten Winkel entgegenstehenden Seite beschrieben wird, so groß, als die beiden Quadrate, welche von den ihn einschließenden Seiten gebildet werden, zusammengenommen.

Es sei (Fig. 47.) BAC ein rechtwinkeliges Dreieck, worin BAC = R, so ist das Quadrat über BC so groß, als die beiden Quadrate über BA und AC zusammengenommen.

Beweis.

Wenn man über BC das Quadrat BCED, über BA das Quadrat BAGF und über AC das Quadrat ACKH beschreibt (46. S.), so ist ∢ BAC = ∢ BAG = R und die Linien CA und AG bilden eine gerade Linie CG (14. S.) Nun ziehe man AD und FC und aus A die AL mit BD gleichlaufend (31. S.) Hier ist ∢ DBC = ∢ FBA (10. Gr.) und

∢ CBA = ∢ CBA, daher

∢ DBA = ∢ FBC (2. Gr.) Ferner ist

AB = BF, auch

DB = BC, folglich

△ ABD = △ FBC (4. S.)

Nun ist, weil AL mit BD und GC mit FB gleichlaufend ist,

BL = 2 △ ABD (41. S.) und

GB = 2 △ FBC, daher auch

BL = GB (6. Gr.)

Zieht man die Linien AE und BK, so wird auf ähnliche Art bewiesen, daß CL = CH ist, daher muß auch

BL + CL = GB + CH seyn. Allein

BL + CL = BE, folglich ist

BE = GB + CH.

Der 48. Satz.

Lehrsatz.

Wenn in einem Dreiecke das Quadrat einer Seite so groß ist, als die Quadrate der zwei andern Seiten zusammengenommen sind, so ist der von diesen andern Seiten eingeschlossene Winkel ein Rechter.

Es sei in dem Dreiecke BAC (Fig. 48) das Quadrat von BC so groß, als die Quadrate von BA und von AC zusammengenommen, so ist der Winkel BAC ein Rechter.

Beweis.

Man errichte auf AC aus A die AD senkrecht, mache AD = AB und ziehe DC, so ist

□. AD = □. AB *). Da nun

□. AC = □. AC, so muß

□. AD + □. AC = □. AB + □. AC seyn (2. Gr.)

Es ist aber □. AD + □. AC = □. DC (47. S.) und

□. AB + □. AC = □. BC nach der Annahme.

Folglich □. DC = □. BC, und daher

DC = BC.

Da nun AD = AB, ferner

AC = AC und endlich

DC = BC, so ist

∢DAC = ∢BAC (8. S.) Es ist aber

∢DAC = R, daher auch

∢BAC = R.

---

*) Die Bezeichnung □. AD bedeutet das über AD beschriebene Quadrat, und so bei den übrigen Linien.

Ende des ersten Buchs.

Das
zweite Buch
der
Elemente des Euclides.

Dieses Buch handelt von jenen Rechtecken und Quadraten, welche entstehen, wenn eine gerade Linie auf bestimmte Art getheilt wird. Aus der Vergleichung dieser Figuren geht eine Reihe merkwürdiger Sätze hervor, welche mit andern ähnlicher Art leicht vermehrt werden könnten. Satz 1—14.

Erklärungen des zweiten Buches.

---

1. Von jedem rechtwinkeligen Parallelogramme (oder Rechtecke) sagt man, es sei aus den beiden geraden Linien, welche den rechten Winkel einschließen, gebildet.

2. In einem Parallelogramme heiße jedes der beiden um die Diagonale herumliegenden Parallelogramme nebst den beiden Ergänzungen, ein Gnomon.

Der 1. Satz.

Lehrsatz.

Wenn von zwei gegebenen geraden Linien die eine in beliebig viele Abschnitte getheilt wird, so ist das aus den beiden ganzen Linien gebildete Rechteck der Summe jener Rechtecke gleich, welche aus der ungetheilten Linie, und aus jedem der Abschnitte gebildet werden.

Es seien (Fig. 49) A und BC die gegebenen geraden Linien, auch sei die BC in den Puncten D und E willkührlich getheilt, so ist das Rechteck aus A und BC der Summe der Rechtecke aus A und BD, aus A und DE und aus E und EC gleich. (Anstatt Rechteck wird künftig immer Recht. gesetzt.)

Beweis.

Man errichte auf CB aus B die senkrechte BF (I, 11. S.), mache BG = A, ziehe durch G die GH gleichlaufend mit BC und durch D, E und C die DK, EL und CH gleichlaufend mit BG (I, 31. S.) so ist

BH = BK + DL + EH. Nun ist aber
BH = Recht. aus GB und BC, ferner
BK = Recht. aus GB und BD, desgleichen
DL = Recht. aus KD und DE und endlich
EH = Recht. aus LE und EC und es ist
LE = KD = GB = A (I. 34. S.)

Folglich ist Recht. aus A und BC = Recht. aus A und BD + Recht. aus A und DE + Recht. aus A und EC.

Der 2. Satz.

Lehrsatz.

Wenn eine gerade Linie in einem willkührlichen Puncte geschnitten wird, so sind die zwei Rechtecke, aus der ganzen Linie und jedem ihrer Abschnitte zusammengenommen, dem Quadrate der ganzen Linie gleich.

Wenn (Fig. 50.) AB in C willkührlich getheilt ist, so ist die Summe die Rechtecke aus BA und AC, und BE und BC dem Quadrate von AB gleich.

Beweis.

Man errichte über AB das Quadrat ABED (I, 46. S.) und ziehe durch C die CF mit AD und BE gleichlaufend (I, 31. S.), so ist ABED = AF + CE. Nun ist aber

ABED = Quadr. von AB, ferner
AF = Recht. aus DA und AC, desgleichen
CE = Recht. aus FC und CB, endlich auch
FC = DA = AB, folglich

Q. von AB = Recht. aus BA und AC + Recht. aus AB und BC.

Der 3. Satz.

Lehrsatz.

Wenn eine gerade Linie in einem willkührlichen Puncte geschnitten wird, so ist das Rechteck aus der

ganzen Linie und einem der beiden Abschnitte der Summe aus dem Rechtecke der beiden Abschnitte und dem Quadrate des ersten Abschnittes gleich.

Es sei AB (Fig. 51.) in C willkührlich geschnitten, so ist das Rechteck aus AB und BC der Summe aus dem Rechtecke von AC und CB nebst dem Quadrate von BC gleich.

Beweis.

Man errichte über BC das Quadrat BCDE (I, 46. S.) verlängere ED nach F und ziehe durch A die AF mit CD und BE gleichlaufend (I, 31. S.), so ist

AE = AD + CE. Nun ist aber
AE = Recht. aus FA und AB,
AD = Recht. aus FA und AC,
CE = Quadr. von BC und endlich
FA = DC = CB.

Folglich ist Recht. aus AB und BC = Recht. aus AC und CB + Quadrat von CB.

Der 4. Satz.

Lehrsatz.

Wenn eine gerade Linie in einem beliebigen Puncte geschnitten wird, so ist das Quadrat von der ganzen Linie den Quadraten der beiden Abschnitte nebst dem doppelten Rechtecke aus diesen Abschnitten gleich.

Es sei (Fig. 52.) die Linie AB in C willkührlich geschnitten, so ist Quadrat von AB = Quadrat von AC + Quadrat von CB + 2 Recht. aus AB und CB.

Beweis.

Man errichte über AB das Quadrat ABED (I, 46. S.), ziehe seine Diagonale BD, und durch C die CF mit AD und BE, durch G aber die HK mit AB und DE parallel (I, 31. S.)

Da nun CF mit AD parallel ist, so ist auch ∠ BGC = ∠ BDA (I, 29. S.) Weil aber auch AD = AB, so ist ∠ BDA = ∠ ABD (I, 5. S.) Folglich auch ∠ BGC = ∠ ABD

(I, 1. Gr.) und daher BC = CG (I, 6. S.) Also ist das Viereck CK gleichseitig.

Da nun auch CF parallel mit BE ist, so ist ∢KBC + ∢GBC = 2R (I, 29. S.) Nun ist aber ∢KBC und daher auch ∢GBC = R (I, 34. S.) Folglich ist das Viereck CK auch rechtwinkelig. Da es auch gleichseitig ist, so muß CK das über BC beschriebene Quadrat seyn (I, 30. Erkl.)

Auf vollkommen ähnliche Art wird bewiesen, daß HF das über HG = AC beschriebene Quadrat ist.

Da nun AG = GE (I, 43. S.) Allein

AG = Recht. aus AC und CG = Recht. aus AC u. CB,

so ist auch GE = Recht. aus AC und CB, und folglich

AG + GE = 2 Recht. aus AC und CB. Nun war aber

CK = Quadr. CB und

HF = Quadr. AC, auch

ADEB = Quadr. AB.

Folglich ist Quadr. AB = Quadr. AC + Quadr. CB + 2 Recht. von AC und CB.

Zusatz.

Hieraus folgt, daß in jedem Quadrate die um die Diagonale liegenden Parallelogramme auch Quadrate sind.

Der 5. Satz.

Lehrsatz.

Wenn eine gerade Linie in einem Puncte gleich und in einem andern Puncte ungleich getheilt wird, so ist das Rechteck aus den ungleichen Abschnitten nebst dem Quadrate des Abschnittes zwischen den Theilpuncten zusammen dem Quadrate der halben Linie gleich.

Es sei die gerade AB (Fig. 53.) in C gleich, und in D ungleich getheilt, so ist das Rechteck aus AD und DB nebst dem Quadrate von CD dem Quadrate von CB gleich.

Beweis.

Man errichte über CB das Quadrat CBFE (I, 46. S.), dessen Diagonale BE ist, ziehe durch D die DHG mit CE und

BF; durch H die KHM mit CB und EF und durch A die AK mit CE und BF parallel (I, 31. S.)

Da nun hier CH = HF (I, 43. S.) und

DM = DM, so ist

CM = DF (I, 2. Gr.)

Da aber AC = CB, so ist auch

AL = CM (I, 36. S.) folglich auch

AL = DF (I, 1. Gr.) Da aber

CH = CH, so ist

AH = Gnom. NOP und da

LG = LG, so ist auch

AH + LG = CEFB.

Nun ist aber AH = Recht. aus AD und DH = Recht. aus AD und DB, ferner ist LG = Quadr. LH = Quadr. CD (II, 4. Zus.) ferner CEFB = Quadr. von CB. Daher ist

Recht. aus AD und DB + Quadr. CD = Quadr. CB.

Der 6. Satz.

Lehrsatz.

Wenn eine gerade Linie halbirt und dieselbe um eine bestimmte Linie verlängert wird, so ist das Rechteck, welches aus der Verlängerung und aus der ganzen nebst der Verlängerung gebildet wird, nebst dem Quadrate der halben Linie so groß, als das Quadrat aus der halben Linie nebst ihrer Verlängerung.

Es sei (Fig. 54.) die AB in C halbirt und über B um die bestimmte Linie BD verlängert, so ist das Rechteck aus AB und BD nebst dem Quadrate von CB dem Quadrate von CD gleich.

Beweis.

Man bilde von CD das Quadrat CDFE (I, 46. S.), dessen Diagonale DE ist, ziehe durch B die BHG mit CE und DF, durch H die MHK mit AD und EF und durch A die AK mit CE und DF gleichlaufend (I, 31. S.)

Da nun hier AC = CB und folglich
AL = CH (I, 36. S.) aber
CH = HF (I, 43. S.) und
AL = HF (I, 1. Gr.) dann
CM = CM, so ist
AM = Gnom. NOP; da aber
LG = LG, so ist
AM + LG = CEFD. Nun ist aber
AM = Recht. aus AD und DM = Recht. aus AD und DB
LG = Quadr. LH = Quadr. CB und CEFD = Quadr. CD (II, 4. Zus.)

Folglich ist Recht. aus AD und DB + Quadr. CB = Quadr. CD.

Der 7. Satz.

Lehrsatz.

Wenn eine gerade Linie in einem willkührlichen Puncte geschnitten wird, so sind die Quadrate aus der ganzen Linie und aus einem ihrer Abschnitte zusammen so groß, als das doppelte Rechteck aus der ganzen Linie und dem ebenbemerkten Abschnitte nebst dem Quadrate des andern Abschnittes zusammen.

Es sei die Linie BA (Fig. 55.) in C willkührlich getheilt, so ist das Quadrat von AB nebst dem Quadrate von BC dem Rechtecke aus AB und BC nebst dem Quadrate von AC gleich.

Beweis.

Man bilde über AB das Quadrat ABED (I, 46. S.), ziehe die Diagonale BD, durch C die CN parallel mit BE und AD, und durch G die FH mit BA und ED gleichlaufend (I, 31. S.)

Hier ist AG = GE (I, 43. S.) da nun
CF = CF, so ist
AF = CE und daher
AF + CE = 2 AF.

Nun ist aber AF + CE = Gnom KLM + CF. Daher auch
Gnom. KLM + CF = 2 AF; allein
HN = HN, folglich
ADEB + CF = 2 AF + HN; allein es ist
ADEB = Quadrat von AB.
CF = Quadrat von BC (II, 4. Zus.)
AF = Recht. aus AB und BF = Recht. aus AB und BC und
HN = Quadr. HG = Quadr. AC (II, 4. Zus.)
Folglich ist Quadr. AB + Quadr. BC = 2 Recht. von AB und BC + Quadr. AC.

Der 8. Satz.

Lehrsatz.

Wenn eine gerade Linie in einem Puncte willkührlich geschnitten wird, so ist das vierfache Rechteck aus der ganzen Linie und einem ihrer Abschnitte, nebst dem Quadrate des andern Abschnitts, zusammen so groß als das Quadrat einer Linie, welche aus der ganzen und dem ersten Abschnitte besteht.

Es sei die Linie AB (Fig. 56.) willkührlich in C geschnitten, so ist das vierfache Rechteck aus AB und BC, nebst dem Quadrate von AC, zusammen so groß als das Quadrat von AD = AB + BC.

Beweis.

Wenn man die Linie AB über B verlängert bis BD = BC, so ist AD = AB + BC. Nun errichte man über AD das Quadrat ADFD (I, 46. S.), ziehe die Diagonale DE, durch B und C die BL und CH parallel mit DF und AE und durch K und Q die MN und OP parallel mit AD und EF (I, 31. S.)

Da hier CB = BD und
BC = GK = QR auch
BD = KN = RP (I, 34. S.) so ist
GK = KN und QR = RP (I, 1. Gr.) daher
CK = BN und GR = KP (I, 36. S.)

Da aber CK = KP (I, 43. S.), so sind alle vier Parallelogramme einander gleich und CP = 4 CK.

Da CB = BD und BD = BK (II, 4. Zus.) = CG (I, 34. S.) auch CB = GK = GQ, so ist CG = GQ. Es war aber auch QR = RP, folglich ist

AG = MQ und QL = RF (I, 36. S.)

Es ist aber im Parallelogramme ML das Rechteck MQ = Recht. QL (I, 43. S.), folglich auch AG = RF. Daher ist AG = MQ = QL = RF und ihre Summe = 4AG. Allein CP = 4CK. Daher auch Gnom. STV = 4 AK, aber

OH = OH, folglich

AEFD = Quadr. AD = 4AK + OH.

Allein AK = Recht. aus AB und BK = Recht. aus AB und BC und

OH = Quadr. OQ = Quadr. AC (II, 4. Zus.) folglich ist 4 Recht. aus AB und BC + Quadr. AC = Quadr. AD.

Der 9. Satz.

Lehrsatz.

Wenn eine gerade Linie in einem Puncte gleich und in einem andern ungleich getheilt wird, so sind die Quadrate der ungleichen Abschnitte zusammen so groß, als die doppelten Quadrate aus der halben Linie und aus dem Abschnitte zwischen den Theilpuncten zusammen.

Es sei (Fig. 57.) die AB in C gleich und in D ungleich getheilt, so ist das Quadrat von AD und das Quadrat von DB zusammengenommen so groß, als die Summe aus dem doppelten Quadrate von AC und dem doppelten Quadrate von CD.

Beweis.

Man errichte auf AB aus C die CE senkrecht (I, 11. S.) mache CE = CA = CB und ziehe die AE und EB. Auch ziehe man durch D die DF mit CE und durch F die FG mit BA parallel (I, 31. S.) und die Verbindungslinie AF.

Da hier ∢ ACE = R und AC = CE, so ist
∢ AEC = ½ R (I, 32. u. 5. S.) und ebenso
∢ CEB = ∢ CBE = ½ R, daher ist
∢ AEB = R.

Da nun GF mit AB und FD mit EC gleichlaufend, und folglich ∢ EGF = ∢ FDB = ∢ ECB = R (I, 29. S.), auch ∢ GEF = ∢ DBF = ½ R, so ist auch ∢ EFG = ∢ DFB = ½ R (I, 32. S.), daher EG = GF und FD = DB (I, 6. S.) Da ∢ ACE = R und AC = CE, so ist Quadr. AE = 2 Quadr. AC (I, 47. S.) Da ∢ EGF = R und EG = GF, so ist das Quadr. EF = 2 Quadr. GF (I, 47. S.) und weil auch GF = CD (I, 34. S.), so ist das Quadr. EF = 2 Quadr. CD. Da aber ∢ AEF = R, so ist das Quadr. AF = dem Quadr. AE nebst dem Quadr. EF (I, 47. S.) Nun war aber das Quadr. AE = 2 Quadr. AC und das Quadr. EF = 2 Quadr. CD. Daher ist das Quadr. AF = 2 Quadr. AC + 2 Quadr. CD. Es ist aber, weil ∢ FDA = R, das Quadr. AF = dem Quadr. AD + dem Quadr. DF, oder, weil DF = DB, so ist auch das Quadr. AF dem Quadr. AD nebst dem Quadr. DB gleich. Daher ist das Quadr. AD nebst dem Quadr. DB = 2 Quadr. AC + 2 Quadr. DC.

Der 10. Satz.

Lehrsatz.

Wenn eine gerade Linie halbirt und in ihrer Verlängerung eine andere ihr angesetzt wird, so ist das Quadrat der aus der ganzen und der angesetzten bestehenden Linie, nebst dem Quadrate der angesetzten, so groß, als das doppelte Quadrat aus der halben, nebst dem doppelten Quadrate aus der halben und der angesetzten Linie.

Es sei (Fig. 58.) die AB in C halbirt, und an die verlängerte AB die Linie BD gesetzt, so ist das Quadrat von AD

+ dem Quadrate von BD = 2 Quadrat von AC + 2 Quadrat von CD.

Beweis.

Man errichte auf AB aus C die CE lothrecht (I, 11. S.), mache CE = CA = CB und ziehe AE und EB. Zieht man nun durch E die EF mit AD und durch D die DF mit CE gleichlaufend (I, 31. S.), so ist ∢ CEF + ∢ EFD = 2 R (I, 29. S.) Folglich ∢ BEF + EFD < 2 R, und es müssen die Linien EB und FD über B und D verlängert einmal zusammentreffen (I, 11. Gr.) Wenn dieß in G geschieht, so ziehe man AG.

Da ∢ ACE = R und AC = CE, so ist auch
∢ AEC = ½ R (I, 32. u. 5. S.) Ebenso ist
∢ CEB = ∢ CBE = ½ R. Daher auch
∢ AEB = R.

Nun ist ∢ DBG = ∢ CBE (I, 15. S.) und, weil FG mit CE gleichlaufend ist, auch ∢ DGB = ∢ CEB (I, 29. S.) Daher ist ∢ DBG = ∢ DGB = ½ R und DB = DG (I, 6. S.) Nun ist ∢ ECD = R und EFD = ∢ ECD. Daher auch EF = FG (I, 32. u. 6. S.)

Da nun ∢ ACE = R und AC = CE, so ist das Quadr. AE = 2 Quadr. AC (I, 47. S.) Da auch EFG = R und EF = FG, so ist das Quadr. EG = 2 Quadr. EF (I, 47. S.) Es ist aber EF = CD (I, 34. S.) Daher Quadr. EG = 2 Quadr. von CD.

Da ferner ∢ AEG = R, so ist Quadr. AG = Quadr. AE + Quaor. von EG (I, 47. S.) Es war aber Quadr. AE = 2 Quadr. AC und Quadr. EG = 2 Quadr. CD. Folglich ist Quadr. AG = 2 Quadr. AC + 2 Quadr. CD.

Es ist aber, weil ∢ ADG = R auch Quadr. AG = Quadr. AD + Quadr. DG (I, 47. S.) Allein DG = BD, folglich Quadr. AG = Quadr. AD + Quadr. BD und daher denn

Quadr. AD + Quadr. BD = 2 Quadr. AC + 2 Quadr. CD.

Der 11. Satz.

Aufgabe.

Eine gegebene gerade Linie so zu theilen, daß das Rechteck aus der ganzen Linie und einem Abschnitte dem Quadrate des andern Abschnitts gleich ist.

Es sei (Fig. 59.) AB die gegebene Linie, so soll dieselbe in H so getheilt werden, daß das Rechteck aus AB und BH dem Quadrate von AH gleich ist.

Auflösung.

Man bilde über AB das Quadrat ABDC (I, 46. S.) halbire AC in E (I, 10. S.), ziehe BE, verlängere CA nach F bis EF = EB, bilde über AF das Quadrat AFGH und verlängere GH bis K, so ist die Linie AB im Puncte H auf die verlangte Art getheilt.

Beweis.

Da CE = EA ist und CA bis F verlängert wurde, so ist Recht. aus CF und FA + Quadr. AE = Quadr. EF (II, 6. S.) = Quadr. EB, weil EF = EB. Nun ist, weil ∢BAE = R, Quadr. EB = Quadr. AB + Quadr. AE (I, 47. S.) Folglich auch Quadr. AB + Quadr. AE = Recht. aus CF und FA + Quadr. AE (I, 1. Gr.) Wird nun beiderseits das Quadrat von AE weggenommen, so bleibt Recht. aus CF und FA = Quadr. AB (I, 3. Gr.) oder FK = AD. Nimmt man beiderseits HC weg, so ist auch FH = HD; allein es ist FH das Quadrat über HA und HD das Rechteck aus DB und BH, oder auch aus AB und BH, weil DB = AB; folglich ist Rechteck aus AB und BH = Quadrat über AH.

Der 12. Satz.

Lehrsatz.

In jedem stumpfwinkeligen Dreiecke übertrifft das Quadrat der, dem stumpfen Winkel gegenüber-

liegenden Seite die beiden Quadrate der ihn einschließenden Seiten zusammengenommen, um das doppelte Rechteck aus einer dieser Seiten und aus der ihr in verlängerter Richtung angesetzten Linie vom stumpfen Winkel bis zu dem Lothe, welches man auf sie von ihrem Gegenwinkel herabzieht.

Wenn (Fig. 60.) CAB das stumpfwinkelige Dreieck und BAC der stumpfe Winkel, auch BD das Loth ist, welches von B auf die verlängerte CA gezogen wird, so ist das Quadrat von CB = dem Quadrate von CA + Quadrat von AB + 2 Recht. aus CA und AD.

Beweis.

Da die Linie CD in A willkührlich getheilt ist, so hat man Quadr. CD = Quadr. CA + Quadr. AD + 2 Recht. aus CA und AD (II, 4. S.) Setzt man nun beiderseits das Quadrat von BD hinzu, so ist Quadr. CD + Quadr. DB = Quadr. CA + Quadr. AD + Quadr. DB + 2 Recht. aus CA und AD (I, 2. Gr.) Da nun der Winkel bei D ein Rechter ist, so hat man Quadr. CD + Quadr. DB = Quadr. CB (I, 47. S.) und ebenso Quadr. AD + Quadr. DB = Quadr. AB. Daher ist nun Quadr. CB = Quadr. CA + Quadr. AB + 2 Recht. aus CA und AD.

Der 13. Satz.

Lehrsatz.

In jedem spitzwinkeligen Dreiecke wird das Quadrat der, einem spitzen Winkel gegenüberliegenden Seite von den Quadraten der ihn einschließenden Seiten zusammengenommen um das doppelte Rechteck übertroffen, welches aus einer der einschließenden Seiten und jenem Abschnitte von ihr gebildet wird, der zwischen dem spitzen Winkel und einem Lothe liegt, welches vom gegenüberliegenden Winkelpuncte auf sie gezogen wird.

Es sei ABC (Fig. 61.) das spitzwinkelige Dreieck und AD das von A auf BC gezogene Loth, so ist das Quadr. von CB + Quadr. von AB = 2 Recht. aus CB und BD + Quadr. von AC.

Beweis

Da die Linie CB in D willkührlich geschnitten ist, so ist Quadr. CB + Quadr. DB = 2 Rechteck aus CB und BD + Quadr. DC (II, 7. S.) Wird beiderseits das Quadr. AD zugesetzt, so ist Quadr. CB + Quadr. BD + Quadr. AD = 2 Recht. aus CB und BD + Quadr. DC + Quadr. AD. Weil nun bei D zwei rechte Winkel sind, so ist Quadr. BD + Quadr. AD = Quadr. AB, und Quadr. DC + Quadr. AD = Quadr. AC (I, 47. S.) Folglich ist auch Quadr. CB + Quadr. AB = 2 Recht. CB und BD + Quadr. AC.

Der 14. Satz.

Aufgabe.

Wenn eine geradlinige Figur gegeben ist, so soll ein Quadrat gebildet werden, welches ihr gleich ist.

Es sei (Fig. 62.) A die gegebene geradlinige Figur und man soll ein Quadrat finden, welches ihr gleich ist.

Auflösung.

Man bilde ein Rechteck BD = A (I, 45. S.) Ist nun BE = ED, so ist BD das verlangte Quadrat. Sind aber die Linien BE und ED ungleich, so verlängere man die grössere BE nach F bis EF = ED. Dann halbire man BF in G, beschreibe aus G mit GB oder GF den Halbkreis BHF, verlängere DE bis H und ziehe GH.

Beweis.

Da die Linie BF in G gleich und in E ungleich getheilt ist, so ist Rechteck aus BE und EF + Quadr. EG = Quadr.

GF (II, 5. S.) = Quadr. GH (I, 15. Erkl.) Da nun bei E der rechte Winkel HEG ist, so ist Quadr. GH = Quadr. HE + Quadr. EG. Daher ist Rechteck aus BE und EF + Quadr. EG = Quadr. HE + Quadr. EG (I, 47. S.) Nimmt man nun beiderseits Quadr. von EG hinweg, so bleibt Recht. aus BE und EF = A = Quadr. HE.

Ende des zweiten Buchs.

Das
dritte Buch
der
Elemente des Euclides.

Dieses Buch handelt:

1. Von geraden Linien, welche in Bezug auf den Kreis theils schneidende, theils berührende sind. Satz 1—19.

2. Von Winkeln, deren Scheitel theils im Mittelpuncte, theils in der Peripherie des Kreises liegen. Satz 20—34.

3. Von Rechtecken und Quadraten solcher Linien, welche zum Theil in dem Kreise, zum Theil an und ausser demselben sich befinden. Satz 35—37.

Erklärungen des dritten Buches.

---

1. Kreise sind einander gleich, in welchen die Durchmesser oder die vom Mittelpuncte ausgehenden Linien (die Halbmesser) einander gleich sind.

2. Eine gerade Linie berührt den Kreis, wenn sie denselben trifft, ohne ihn in ihrer Verlängerung zu schneiden. (Man nennt sie Tangente des Kreises.)

3. Kreise berühren einander, wenn sie einander treffen, ohne sich zu durchschneiden.

4. Im Kreise sind gerade Linien gleich weit vom Mittelpuncte entfernt, wenn die aus dem Mittelpuncte auf sie gefällten Lothe einander gleich sind.

5. Jene gerade Linie ist aber weiter vom Mittelpuncte entfernt, worauf ein größeres Loth fällt.

6. Ein Kreisabschnitt (oder Segment) ist jene Figur, welche von einer geraden Linie und einem Theile des Umkreises (Kreisbogen) eingeschlossen wird.

7. Der Winkel des Kreisabschnitts ist jener, welcher von dieser geraden Linie und dem Kreisbogen eingeschlossen wird.

8. Der Winkel im Kreisabschnitte ist jener, welcher von zwei geraden Linien gebildet wird, die von einem willkührlichen Puncte des Kreisbogens an die Endpuncte der geraden Linie gehen, welche die Grundlinie des Abschnittes ist.

9. Da die, einen solchen Winkel einschließenden Linien einen Kreisbogen abschneiden, so sagt man, dieser Winkel stehe auf diesem Kreisbogen.

10. Ein Kreisausschnitt (Sector), ist die Figur, welche von den Schenkeln eines Winkels am Mittelpuncte des Kreises und dem von ihnen abgeschnittenen Kreisbogen umschlossen wird.

11. Kreisabschnitte sind einander ähnlich, wenn sie gleiche Winkel fassen, oder wenn die Winkel in den Abschnitten einander gleich sind.

Der 1. Satz.

Aufgabe.

Den Mittelpunct eines gegebenen Kreises zu finden.

Es sei (Fig. 63.) ABC der gegebene Kreis, und man soll seinen Mittelpunct finden.

Auflösung.

Man ziehe in dem Kreise eine willkührliche gerade Linie AB, halbire sie in D, und errichte aus D die DC senkrecht auf AB. Wird nun CD bis E verlängert und in F halbirt, so ist F der gesuchte Mittelpunct.

Beweis.

Wenn F der Mittelpunct des Kreises nicht wäre, so sei irgend ein anderer, etwa G, dieser Mittelpunct. Zieht man nun die GA, GD und GB, so ist

AD = DB, ferner

GD = GD und endlich

AG = GB (I, 15. Erkl.) daher

$\measuredangle$ ADG = $\measuredangle$ GDB (I, 8. S.) und folglich jeder dieser Winkel ein Rechter (I, 10. Erkl.) Nun ist aber auch

$\measuredangle$ CDB = R, folglich wäre

$\measuredangle$ CDB = $\measuredangle$ GDB (I, 10. Gr.), welches aber unmöglich ist (I, 9. Gr.)

Zusatz.

Hieraus folgt, daß, wenn im Kreise eine gerade Linie eine andere halbirt und auf ihr lothrecht steht, in der schneidenden Linie der Mittelpunct des Kreises sei.

Der 2. Satz.

Lehrsatz.

Wenn eine gerade Linie zwei beliebige Puncte in der Peripherie eines Kreises verbindet, so fällt sie innerhalb dieses Kreises.

In des Kreises ABC (Fig. 64.) Peripherie nehme man die willkührlichen Puncte A und B, und ziehe die gerade AB, so liegt diese innerhalb des Kreises.

Beweis.

Wenn diese gerade Linie nicht innerhalb dieses Kreises liegt, so falle sie ausserhalb, wie AEB. Nun nehme man des Kreises Mittelpunct D (III, 1. S.) und ziehe DA und DB. Dann nehme man zwischen A und B in der Peripherie einen beliebigen Punct F, ziehe DF, und verlängere sie bis E. Da nun hier

DA = DB (I, 15. Erkl.), so ist

∢ DAE = ∢ DBE (I, 5. S.) Nun ist aber

DEB > ∢ DAE (I, 16. S.), folglich auch

∢ DEB > ∢ DBE und daher

DB > DE (I, 19. S.) Es ist aber

DB = DF (I, 15. Erkl.) folglich wäre

DF > DE, welches unmöglich ist (I, 9. Gr.)

Der 3. Satz.

Lehrsatz.

Wenn im Kreise eine durch den Mittelpunct gehende gerade Linie eine andere nicht durch den Mittelpunct gehende halbirt, so schneidet sie dieselbe lothrecht; und wenn sie dieselbe lothrecht schneidet, so halbirt sie auch dieselbe.

Es sei (Fig. 65.) ACB der Kreis, in welchem die durch den Mittelpunct gehende Linie DC die nicht durch den Mittelpunct gehende AB in F halbirt, so stehen beide lothrecht auf einander, und wenn die durch den Mittelpunct gehende CD auf AB lothrecht steht, so wird AB durch sie halbirt.

Beweis.

Man nehme den Mittelpunct des Kreises E (III, 1. S.) und ziehe EA und EB.

I. Da CD die AB in F halbirt, so ist

AF = FB. Nun ist auch

EF = EF, und

AE = EB (I, 15. Erkl.) Daher ist

$\measuredangle$ AFE = $\measuredangle$ BFE (I, 8. S.) und folglich die CD lothrecht auf AB (I, 10. Erkl.)

II. Wenn aber CD auf AB senkrecht steht, so ist

$\measuredangle$ AFE = $\measuredangle$ EFB (I, 10. Erkl.) Ferner ist

AE = EB (I, 15. Erkl.) auch

$\measuredangle$ EAF = $\measuredangle$ EBF (I, 5. S.) endlich

EF = EF, folglich

AF = BF (I, 26. S.)

Der 4. Satz.

Lehrsatz.

Wenn in dem Kreise zwei nicht durch den Mittelpunct gehende gerade Linien einander durchschneiden, so halbiren sie einander nicht.

In dem Kreise ABCD (Fig. 66.) schneiden die nicht durch den Mittelpunct gehenden Linien AC und BD einander in E; daher halbiren sie einander nicht.

Beweis.

Man nehme an, sie halbirten einander, so wäre AE = EC und BE = ED. Nimmt man nun des Kreises Mittelpunct F und zieht FE, so wäre

$\measuredangle$ FEA = $\measuredangle$ FEB = R (III, 3. S.) Folglich

$\measuredangle$ FEA = $\measuredangle$ FEB, welches unmöglich ist (I, 9. Gr.)

Der 5. Satz.

Lehrsatz.

Wenn zwei Kreise einander durchschneiden, so haben sie keinen gemeinschaftlichen Mittelpunct.

Wenn die beiden Kreise (Fig. 67.) ABC und CDG einander in B und C durchschneiden, so haben sie nicht einerlei Mittelpunct.

Beweis.

Gesetzt, sie hätten einen gemeinschaftlichen Mittelpunct E, so ziehe man EC und die willkührliche gerade Linie EFG, so ist für den Kreis ABC die EC = EF
und für den Kreis CDG die EC = EG (I, 15. Erkl.)
folglich müßte auch EG = EF seyn (I, 1. Gr.), welches aber unmöglich ist (I, 9. Gr.)

Der 6. Satz.

Lehrsatz.

Wenn sich zwei Kreise inwendig berühren, so haben sie keinen gemeinschaftlichen Mittelpunct.

Wenn die beiden Kreise (Fig. 68.) ABC und CDE sich in dem Puncte C berühren, so haben sie nicht einerlei Mittelpunct.

Beweis.

Wenn sie den gemeinschaftlichen Mittelpunct F hätten, so wäre, wenn FC und die willkührliche Linie FEB gezogen wird, bei dem Kreise ABC die FC = FB und bei dem Kreise CDE die FC = FE (I, 15. Erkl.),
daher wäre auch FB = FE (I, 1. Gr.), welches aber widersprechend ist (I, 9. Gr.)

Der 7. Satz.

Lehrsatz.

Wenn man im Durchmesser eines Kreises einen Punct ausserhalb des Mittelpunctes annimmt, aus welchem gerade Linien zur Peripherie gehen, so ist die größte von ihnen diejenige, worin der Mittelpunct liegt, ihr Rest aber die kleinste; von den übrigen aber ist immer jene, welche näher bei der

durch den Mittelpunct gehenden liegt, grösser, als die entferntere; auch gehen von diesem Puncte aus nur zwei gleiche gerade Linien auf beiden Seiten der kleinsten an den Umkreis.

Es sei ACDK (Fig. 69.) der Kreis, AD dessen Durchmesser, und F ein Punct ausser dem Mittelpuncte E. Wenn nun von F die Linien FB, FC und FG an den Umkreis gehen, so ist FA die grösste, FD die kleinste; von den übrigen aber FB > FC, FC > FG.

Beweis.

I. Wenn man die geraden EB, EC und EG zieht, so ist
BE + EF > FB (I, 20. S.) Nun ist aber
BE = AE (I, 15. Erkl.), daher auch
BE + EF = AE + EF, und folglich
AF > FB.

Da BE = CE (I, 15. Erkl.) EF = EF und ∢ BEF > CEF, so ist BF > CF (I, 24. S.) und auf gleiche Weise FC > FG.

Da GF + FE > EG (I, 20. S.) und
EG = ED = DF + FE (I, 15. Erkl.), so ist
GF + FE > DF + FE, folglich
GF > DF (I, 5. Gr.)

II. Man setze an FE den Winkel FEH = ∢ FEG (I, 23. S.) und ziehe FH, so ist, weil auch EH = EG (I, 15. Erkl.) und
EF = EF, nun auch
FH = FG (I, 4. S.)

Wäre nun ausser FH noch irgend eine andere Linie, etwa FK, der FG gleich, so wäre auch FK = FH, welches unmöglich ist, da nach dem Obigen die der AF näher liegende FK grösser ist, als die entferntere FH.

Oder, wäre FK = FG, so ziehe man EK. Nun ist auch KE = EG (I, 15. Erkl.) und EF = EF. Daher denn
∢ KEF = ∢ FEG (I, 8. S.) allein es war
∢ FEG = ∢ FEH; folglich wäre
∢ KEF = ∢ FEH, welches widersprechend ist.
(I, 9. Gr.)

Der 8. Satz.

Lehrsatz.

Wenn ausserhalb eines Kreises ein Punct angenommen wird, und von demselben gerade Linien zum Umkreise gehen, wovon eine nach dem Mittelpuncte gehet, die andern aber ihn willkührlich schneiden, so ist unter jenen, welche an den hohlen Umkreis gehen, die durch den Mittelpunct gehende die größte, und von den übrigen jede dieser näher liegende größer als die entferntere; unter denen aber, welche an den erhabenen Umkreis gehen, ist die zwischen dem angenommenen Puncte und dem Durchmesser liegende die kleinste, und von den übrigen jede, der kleinsten nähere, kleiner als die entferntere; auch gehen vom angenommenen Puncte nur zwei gleiche gerade Linien auf beiden Seiten der kleinsten an den Kreis.

Es sei ACN (Fig. 70.) der Kreis, und D der Punct ausser ihm, woraus DA, DE, DF und DC so gezogen sind, daß DA durch den Mittelpunct M geht. Hier ist DA die größte und DG die kleinste dieser Linien. Auch ist $DE > EF$, $DF > DC$, so wie auch $DK < DL$ und $DL < DH$ ist.

Beweis.

Man ziehe aus dem Mittelpuncte M die ME, MF, MC, MH, ML und MK.

I. Hier ist $DM + ME > DE$ (I, 20. S.) Allein
$ME = MA$ (I, 15. Erkl.) folglich
$DM + MA > DE$. Allein
$DM + MA = DA$, folglich
$DA > DE$.

Da nun $ME = MF$ (I, 15. Erkl.) und
$MD = MD$, ferner
$\sphericalangle DME > \sphericalangle DMF$, so ist
$DE > DF$ (I, 24. S.)

Ganz auf ähnliche Art wird bewiesen, daß $DF > DC$.

II. Ferner ist MK + KD > MD (I, 20. S.) Allein
MD = MG + GD. Also
MK + KD > MG + GD. Nun ist
MK = MG (I, 15. Erkl.) daher
MG + KD > MG + GD.
Folglich auch KG > GD (I, 3. Gr.) oder
DG < DK.

Da nun in den Dreiecken MLD und MKD nach (I, 21. S.)
MK + KD < ML + LD, aber
MK = ML (I, 15. Erkl.), so ist auch
DK < DL (I, 3. Gr.)

Und eben so wird bewiesen, daß DL < DH.

III. Setzt man an DM den Winkel DMB = Winkel DMK (I, 23. S.) und zieht DB, so ist, weil MB = MK und MD beiden Dreiecken gemein, auch DB = DK (I, 4. S.) Wäre nun auſſer der DB noch irgend eine andere, etwa DN, der DK gleich, so müßte auch DN = DB seyn (I, 1. Gr.), welches unmöglich ist, da nach dem Obigen die, der DG näher liegende DB kleiner als die entferntere DN seyn muß.

Oder: Wäre DN = DK, so ziehe man MN. Da hier MN = MK und MD beiden Dreiecken MDK und MDN gemein wäre, so müßte auch ∢ DMK = ∢ DMN (I, 8. S.) seyn.
Allein ∢ DMK = ∢ DMB nach der Annahme;
folglich wäre ∢ DMN = ∢ DMB, welches widersprechend ist (I, 9. Gr.)

Der 9. Satz.

Lehrsatz.

Wenn von einem, innerhalb eines Kreises angenommenen Puncte mehr als als zwei gleiche gerade Linien zum Umkreise gehen, so ist dieser Punct des Kreises Mittelpunct.

Es sei ABC (Fig. 71.) der Kreis und D ein Punct in demselben, aus welchem die Linien DA = DB = DC zum Umkreise gehen, so ist D der Mittelpunct des Kreises.

Beweis.

Man ziehe die Verbindungslinien AB und BC und halbire sie in E und F (I, 10. S.) Ferner ziehe man DE und DF, welche beiderseits nach K und G, nach L und H verlängert werden.

Da hier AE = EB, auch
ED = ED und
AD = DB (I, 15. Erkl.) so ist
$\sphericalangle$ AED = $\sphericalangle$ DEB (I, 8. S.) daher
$\sphericalangle$ AED = $\sphericalangle$ BED = R (I, 10. Erkl.)

Und es muß in KG der Mittelpunct des Kreises liegen (III, 1. S.)

Auf ähnliche Art wird bewiesen, daß auch in HL der Mittelpunct sei. Folglich ist D dieser Mittelpunct.

Ein anderer Beweis.

Wäre (Fig. 72.) D nicht der Mittelpunct des Kreises, so sei es irgend ein anderer, etwa E. Wird nun DE gezogen, und beiderseits bis zum Umkreise nach F und G verlängert, so ist FG des Kreises Durchmesser, und es wäre DC größer als DB, auch DB größer als DA (III, 8. S.), welches der Annahme DC = DB = DA widerspricht.

Der 10. Satz.

Lehrsatz.

Ein Kreis kann einen andern in nicht mehr als in zwei Puncten durchschneiden.

Der Kreis ABC (Fig. 73.) kann von einem andern nur in zwei Puncten geschnitten werden.

Beweis.

Wenn dieser andere Kreis den Kreis ABC in den drei Puncten D, B und E schnitte, so ziehe man die Linien DB und BE, halbire jene in G, diese in F, errichte aus G die GK lothrecht auf DB und aus F die FC lothrecht auf BE und verlängere sie nach A und H, so muß der Durchschnittspunct L des Kreises ABC Mittelpunct seyn (III, 1. S.) Auf die-

selbe Art wird bewiesen, daß L auch der Mittelpunct des ersten Kreises sei, welches widersprechend ist (III, 5. S.)

Ein anderer Beweis.

Wenn der erste Kreis den andern ABC (Fig. 74.) in dreien Puncten B, E und D schnitte, so nehme man des Kreises ABC Mittelpunct F (III, 1. S.) und ziehe FD, FE und FB, welche einander gleich sind (I, 15. Erkl.) Daher wäre nun (nach III, 9. S.) auch F der Mittelpunct des ersten Kreises, welches widersprechend ist (III, 5. S.)

Der 11. Satz.

Lehrsatz.

Wenn sich zwei Kreise inwendig berühren, so geht jene gerade Linie, welche ihre Mittelpuncte verbindet, hinlänglich verlängert, durch den Berührungspunct beider Kreise.

Wenn sich die Kreise (Fig. 75.) ADE und ABC in A berühren, so liegt dieser Punct A mit den zwei Mittelpuncten in einer geraden Linie.

Beweis.

Man nehme des Kreises ABC Mittelpunct F (III, 1. S.) und ziehe AF. Wäre nun in dieser AF, welche willkührlich verlängert werden kann, nicht auch der Mittelpunct des Kreises ADE, so sei er irgendwo ausser AF, etwa in G. Man ziehe GF und verlängere sie beiderseits nach C und H. Wird nun die AG gezogen, so ist

$AG + GF > AF$ (I, 20. S.) Allein

$AF = FH = HG + GF$ (I, 15. Erkl.) daher

$AG + GF > HG + GF$ und auch

$AG > HG$ (I, 5. Gr.) Nun war aber

$AG = DG$ (I, 15. Erkl.) folglich wäre

$DG > HG$, welches widersprechend ist (III, 5. S.)

Der 12. Satz.

Lehrsatz.

Wenn sich zwei Kreise auswendig berühren, so geht die Verbindungslinie ihrer Mittelpuncte durch den Berührungspunct.

Wenn die beiden Kreise (Fig. 76) ABC und ADE sich aussen im Puncte A berühren, so geht die Verbindungslinie ihrer Mittelpuncte durch diesen Punct A.

Beweis.

Wenn diese Verbindungslinie eine andere wäre, und etwa die Linie FCDG vom Mittelpuncte F nach dem Mittelpuncte G, so ziehe man die Linien AF und AG. Hier wäre nun

$AF = FC$ (I, 15. Erkl.) auch

$AG = GD$. Folglich müßte

$AF + AG = FC + GD$ seyn, und daher auch

$FA + AG < FC + CD + DG$, d. h.

$AF + AG < FG$, da doch nach dem Frühern

$AF + AG > FG$ seyn muß (I, 20. S.)

Der 13. Satz.

Lehrsatz.

Zwei Kreise können sich von innen oder von aussen nur in einem Puncte berühren.

Beweis.

I. Wenn der Kreis (Fig. 77.) ABCD von einem andern in zwei Puncten B und D von innen berührt werden könnte, so sei E der Mittelpunct des ersten und F jener des zweiten Kreises. Man ziehe die Verbindungslinie EF, so muß diese, beiderseits verlängert, die Berührungspuncte B und D einmal treffen (III, 11. S.)

Da nun E der Mittelpunct des ersten Kreises ist, so muß

$DE = EB$ (I, 15. Erkl.) folglich auch

$DF > FB$ seyn.

Nun ist F der Mittelpunct des andern Kreises, folglich auch DF = FB (I, 15. Erkl.), welches mit jenem, daß DF > FB ist, im Widerspruche steht.

II. Sollte aber der Kreis ABDC von einem andern in den Puncten A und C von aussen berührt werden, so ziehe man die Verbindungslinie AC.

Da sich die Puncte A und C im Umfange des ersten Kreises ABDC befinden, so fällt die Linie AC innerhalb dieses Kreises (III, 2. S.) und daher ausserhalb des andern Kreises (III, 3. Erkl.) Nun sind aber A und C auch zwei Puncte in dem Umfange des andern Kreises, folglich müßte auch die Linie AC innerhalb dieses andern Kreises liegen (III, 2. S.), welches dem Vorigen offenbar widerspricht.

Der 14. Satz.

Lehrsatz.

Wenn in einem Kreise gerade Linien einander gleich sind, so haben sie auch gleiche Entfernung vom Mittelpuncte; und wenn zwei gerade Linien im Kreise vom Mittelpuncte gleiche Entfernung haben, so sind sie einander gleich.

Wenn in dem Kreise (Fig. 78.) ABDC die AB = CD ist, so haben diese Linien vom Mittelpuncte E gleichen Abstand, und wenn zwei Linien AB und CD vom Mittelpuncte E gleichweit abstehen, so ist auch AB = CD.

Beweis.

Man fälle aus E auf AB die EF und auf CD die EG lothrecht (I, 12. S.) und ziehe AE und EC, so muß AF = FB, und CG = GD (III, 3. S.) seyn.

I. Wenn nun AB = CD, so ist auch

$$\tfrac{1}{2}AB = \tfrac{1}{2}CD \text{ oder auch}$$

AF = CG (I, 7. Gr.)

Da nun E des Kreises Mittelpunct ist, so ist auch AE = EC (I, 15. Erkl.) und daher das Quadr. von AE = Quadr. von EC. Da aber die Winkel bei F und G rechte Winkel sind, so ist

$\sphericalangle$. AE = $\sphericalangle$. AF + $\sphericalangle$. EF und auch
$\sphericalangle$. EC = $\sphericalangle$. CG + $\sphericalangle$. EG (I, 47. S.) Daher ist
$\sphericalangle$. AF + $\sphericalangle$. EF = $\sphericalangle$. CG + $\sphericalangle$. EG.

Weil aber AF = CG ist, so muß auch
$\sphericalangle$. EF = $\sphericalangle$. EG (I, 3. Gr.) und demnach
EF = EG seyn, und es haben die Linien AB und CD vom Mittelpuncte E gleichen Abstand (III, 4. Erkl.)

II. Wenn aber AB und CD gleiche Entfernung vom Mittelpuncte E haben, oder wenn EF = EG (III, 4 Erkl.), so ist, weil nun wie zuvor
$\sphericalangle$. AF + $\sphericalangle$. EF = $\sphericalangle$. CG + $\sphericalangle$. EG ist, und auch
$\sphericalangle$. AF = $\sphericalangle$. CG (I, 3. Gr.) nunmehr
AF = CG. Da aber
AB = 2AF, und
CD = 2CG, so muß auch
AB = CD seyn (I, 6. S.)

Der 15. Satz.

Lehrsatz.

In dem Kreise ist der Durchmesser die größte Linie, und von den übrigen in ihm gezogenen jede dem Mittelpuncte näher liegende größer als die entferntere.

Es sei ABCD (Fig. 79.) der gegebene Kreis, AD sein Durchmesser und E sein Mittelpunct, so ist AD die größte Linie in demselben, und wenn BC näher beim Mittelpuncte ist als FG, so ist BC größer als FG.

Beweis.

Man ziehe aus E auf BC die EH und auf FG die EK lothrecht (I, 12. S.) so ist EK > EH (III, 5 Erkl.) Daher mache man EL = EH (I, 3. S.), errichte auf EK in L die LM senkrecht und verlängere sie bis N; auch ziehe man EM, EN, EF und EG.

Da nun EH = EL, so ist auch
BC = MN (III, 14. S.) Nun ist aber

ME + EN > MN (I, 20. S.) Daher auch
ME + EN > BC. Allein
ME + EN > AD (I, 15. Erkl.) Daher
AD > BC. Da ferner
ME = FE und
EN = EG (I, 15. Erkl.) aber
∢ MEN > ∢ FEG, so ist
MN > FG (I, 24. S.) Es ist aber
MN = BC daher denn
BC > FG.

Der 16. Satz.

Lehrsatz.

Ein aus dem Endpuncte des Durchmessers auf denselben errichtetes Loth fällt ausserhalb des Kreises; ferner fällt zwischen dieses Loth und den Umkreis keine andere gerade Linie, und endlich ist der Winkel des Halbkreises größer; sein Rest aber kleiner, als jeder geradlinige spitze Winkel.

Wenn ABC (Fig. 80.) der Kreis, BA sein Durchmesser, und AE das auf seinen Endpunct A errichtete Loth ist, so fällt dasselbe ganz ausserhalb des Kreises; auch kann zwischen dieses Loth AE und den Kreisbogen AHC keine andere gerade Linie fallen. Endlich ist der Winkel, welcher vom Durchmesser BA und dem Bogen AHC gebildet wird, größer; jener aber, welchen das Loth AE mit eben diesem Bogen AHC bildet, kleiner, als jeder spitze Winkel.

Beweis.

I. Wenn dieses Loth AE nicht ganz ausserhalb des Kreises fiele, so nehme man an, es falle innerhalb desselben, wie AC; so, daß nun der Winkel BAC ein Rechter wäre.

Wird nun DC gezogen, so müßte, weil DC = DA (I. 15. Erkl.) nun auch ∢ DCA = ∢ DAC seyn (I, 5. S.) und es wären in dem Dreiecke CDA zwei Winkel zusammengenommen zweien Rechten gleich, was unmöglich ist (I, 17. S.)

II. Wenn nun zwischen dem Bogen AHC und das Loth AE eine gerade Linie, wie FA fiele, so ziehe man auf diese FA aus D das Loth DG (I, 12. S.) so ist nun, weil DGA ein rechter Winkel ist, auch

$\measuredangle$ DGA $>$ $\measuredangle$ DAG (I, 17. S.) daher

DA $>$ DG (I, 19. S.) Allein

DA $=$ DH (I, 15. Erkl.) daher wäre

DH $>$ DG, welches widersprechend ist (I, 9. Gr.)

III. Wäre jener Winkel, welchen der Durchmesser BA mit dem Bogen AHC bildet, nicht größer, und der Winkel, welchen der Bogen AHC mit dem Lothe AE bildet, nicht kleiner, als irgend ein geradliniger spitzer Winkel, welchen der Durchmesser BA und eine gerade Linie bildete, so müßte diese gerade Linie zwischen den Bogen AHC und das Loth AE fallen, wie etwa AF, welches nach dem Vorigen unmöglich ist.

Zusatz.

Hieraus folgt nun, daß ein aus dem Endpuncte des Durchmessers auf ihn errichtetes Loth den Kreis berührt, und daß eine gerade Linie den Kreis nur in einem Puncte berühren kann, da jede gerade Linie, welche zwei Puncte des Umkreises verbindet, innerhalb des Kreises liegt (III, 2. S.)

Der 17. Satz.

Aufgabe.

Von einem ausserhalb des Kreises gegebenen Puncte eine gerade Linie an den Kreis zu ziehen, welche ihn in einem Puncte berührt.

Wenn (Fig. 81.) CDB der gegebene Kreis und A der gegebene Punct ist, so soll von A eine gerade Linie gezogen werden, welche den Kreis CDB in einem Puncte berührt.

Auflösung.

Man nehme des Kreises Mittelpunct E (III, 1. S.) ziehe EA und beschreibe aus E mit dieser Linie EA den Kreis AFG, errichte auf AE aus D die Linie DF lothrecht (I, 11. S.)

ziehe sowohl EBF als AB, so ist AB jene Linie, welche den Kreis CDB in einem Puncte berührt.

Beweis.

Da hier EA = EF (I, 15. Erkl.) ferner
EB = ED, endlich
$\measuredangle$ AEF = $\measuredangle$ AEF, so ist auch
$\measuredangle$ EBA = $\measuredangle$ EDF (I, 4. S.) Allein
$\measuredangle$ EDF = R, folglich
$\measuredangle$ EBA = R. Daher steht die AB lothrecht auf EB und kann somit den Kreis CDB nur in einem Puncte berühren (III, 16. S.)

Der 18. Satz.

Lehrsatz.

Wenn eine gerade Linie den Kreis berührt und man zieht vom Mittelpuncte nach dem Berührungspuncte eine andere gerade, so steht diese auf der Berührungslinie lothrecht.

Wenn DE (Fig. 82.) die Berührungslinie des Kreises ABC im Puncte C ist, und man zieht FC, so ist FC ein Loth auf DE.

Beweis.

Wenn diese FC nicht senkrecht auf DE wäre, so sei es irgend eine andere von F nach DE gezogene Linie, etwa FG. Daher wäre $\measuredangle$ FGC = R, und somit
$\measuredangle$ FCG < $\measuredangle$ FGC (I, 17. S.) Daher denn auch
FC > FG (I, 19. S.) Es ist aber
FC = FB (I, 15. Erkl.), folglich wäre
FB > FG, welches unmöglich ist (I, 9. Gr.)

Der 19. Satz.

Lehrsatz.

Wenn man aus dem Berührungspuncte einer den den Kreis berührenden geraden Linie ein Loth auf sie errichtet, so liegt in demselben des Kreises Mittelpunct.

Wenn (Fig. 83.) DE den Kreis ABC in C berührt und CA lothrecht auf DE steht, so muß in CA der Mittelpunct des Kreises seyn.

Beweis.

Wenn der Mittelpunct des Kreises nicht in CA liegt, so liege er ausserhalb derselben, etwa in F. Zieht man die gerade FC, so muß

$\measuredangle FCE = R$ seyn (III, 18. S.) Es ist aber

$\measuredangle ACE = R$, nach der Annahme, folglich wäre

$\measuredangle ACE = FCE$, welches widersprechend ist (I, 9. Gr.)

Der 20. Satz.

Lehrsatz.

In jedem Kreise ist der Winkel am Mittelpuncte (Centriwinkel) noch einmal so groß, als der Winkel am Umfange (Peripheriewinkel), wenn beide auf dem nämlichen Bogen stehen.

Es sei (Fig. 84.) im Kreise ABC der Winkel BEC auf dem nämlichen Bogen, worauf $\measuredangle BAC$ steht, so ist jener noch einmal so groß, als dieser.

Beweis.

I. Es befinde sich des Kreises Mittelpunct E zwischen den Schenkeln des Peripheriewinkels BAC.

Wenn man die AE zieht und bis F verlängert, so ist

$EA = EB$ (I, 15. Erkl.) daher

$\measuredangle EAB = \measuredangle EBA$ (I, 5. S.) und

$\measuredangle BEF = 2 \measuredangle EAB$ (I, 32. S.)

Ganz auf ähnliche Art wird bewiesen, daß

$\measuredangle FEC = 2 \measuredangle FAC$, daher ist

$\measuredangle BEF + \measuredangle FEC = 2 \measuredangle BAF + 2 \measuredangle FAC$, folglich

$\measuredangle BEC = 2 \measuredangle BAC$.

II. Befindet sich aber des Kreises Mittelpunct E ausserhalb der Schenkel des Peripheriewinkels BDC, so ziehe man DE und verlängere sie nach G. Nun wird auf ähnliche Art, wie zuvor bewiesen, daß

$\measuredangle$ GEC = 2 $\measuredangle$ GDC, und auch
$\measuredangle$ GEB = 2 $\measuredangle$ GDB ist, daher muß auch
$\measuredangle$ BEC = 2 $\measuredangle$ BDC seyn (I, 3. Gr.)

Der 21. Satz.

Lehrsatz.

In jedem Kreise sind die Winkel, welche in einerlei Abschnitten liegen, einander gleich.

Es sei AEDB (Fig. 85.) der gegebene Kreis und BDEAB ein Abschnitt in ihm, in welchem sich die Winkel BAD und BED befinden, so ist $\measuredangle$ BAD = $\measuredangle$ BED.

Beweis.

Man nehme des Kreises Mittelpunct F, und ziehe FB und FD, so ist

$\measuredangle$ BFD $\measuredangle$ 2 $\measuredangle$ BAD (III, 20. S.) und
$\measuredangle$ BFD = 2 $\measuredangle$ BED. Folglich ist auch
2 $\measuredangle$ BAD = 2 $\measuredangle$ BED und
$\measuredangle$ BAD = $\measuredangle$ BED.

Der 22. Satz.

Lehrsatz.

Wenn sich im Kreise eine vierseitige Figur befindet, so sind ihre gegenüberliegende Winkel paarweise zweien Rechten gleich.

Es sei (Fig. 86.) in dem Kreise ABCD das Viereck ABCD beschrieben, so ist

$\measuredangle$ ABC + $\measuredangle$ ADC = 2R und auch
$\measuredangle$ DAB + $\measuredangle$ DCB = 2R.

Beweis.

Wenn man die Querlinien AC und DB zieht, so ist
$\measuredangle$ CDB = $\measuredangle$ BAC, und
$\measuredangle$ BDA = $\measuredangle$ ACB (III, 21. S.) Folglich ist
$\measuredangle$ ADC = $\measuredangle$ BAC + $\measuredangle$ ACB (I, 2. Gr.) allein
$\measuredangle$ ABC = $\measuredangle$ ABC, somit

$\measuredangle ADC + \measuredangle ABC = \measuredangle BAC + \measuredangle ACB + \measuredangle ABC$. Allein
$\measuredangle BAC + \measuredangle ACB + \measuredangle ABC = 2R$ (I, 32. S.) Folglich ist
$\measuredangle ADC + \measuredangle ABC = 2R$.
Auf ähnliche Art wird auch bewiesen, daß $\measuredangle BAD + \measuredangle DCB = 2R$.

Der 23. Satz.

Lehrsatz.

Auf einer gegebenen geraden Linie können nicht zwei Kreisabschnitte an einerlei Seite beschrieben werden, welche einander ähnlich und ungleich sind.

Auf die gegebene Linie AB (Fig. 87.) können nach einer Seite hin nicht zwei ähnliche, aber ungleiche Kreisabschnitte beschrieben werden.

Beweis.

Wenn zwei solcher Kreisabschnitte auf AB möglich wären, so seien ACB und ADB dieselbe. Zieht man hier die AD willkührlich, verlängert sie über D bis C und zieht nun die Linien BD und BC, so müßte, weil beide Abschnitte einander ähnlich wären, $\measuredangle ADB = \measuredangle ACB$ seyn (III, 11. Erkl.) welches widersprechend ist (I, 16. S.)

Der 24. Satz.

Lehrsatz.

Wenn ähnliche Kreisabschnitte über gleichen geraden Linien stehen, so sind sie einander gleich.

Es seien die Kreisabschnitte (Fig. 88.) AEB und CFD auf den gleichen geraden Linien $AB = CD$ errichtet, so sind sie einander selbst gleich.

Beweis.

Man bringe den Abschnitt AEB so über den Abschnitt CFD, daß A auf C und AB längs CD fällt, so muß, weil $AB = CD$, auch B auf D fallen. Da nun die Abschnitte AEB und CFD, über CD liegend, einander ähnlich sind, so können sie nicht ungleich seyn (III, 23. S.)

Der 25. Satz.

Aufgabe.

Wenn ein Kreisabschnitt gegeben ist, so soll der ihm zugehörige Kreis beschrieben werden.

Es sei ABC (Fig. 89.) der gegebene Abschnitt, und man soll den Kreis beschreiben, welchem er angehört.

Auflösung.

Man halbire AC in D (I, 10. S.) und ziehe auf AC aus D die DB lothrecht (I, 11. S.) Wenn nun die gerade Linie AB gezogen ist, so ist entweder

$\measuredangle ABD > \measuredangle BAD$, oder

$\measuredangle ABD = \measuredangle BAD$, oder $\measuredangle ABD < \measuredangle BAD$.

Beweis.

I. Wenn $\measuredangle ABD > \measuredangle BAD$ ist, so setze man an BA den Winkel BAE, welcher dem Winkel ABD gleich ist (I, 23. S.) und verlängere BD bis E, Hier ist nun

$EA = EB$ (I, 6. S.) und weil ferner

$AD = DC$, auch

$DE = DE$, und endlich

$\measuredangle ADE = \measuredangle CDE = R$ (I, 4. S.) so muß auch

$AE = EC$ seyn (I, 4. S.) daher ist

$EA = EB = EC$ und folglich der Punct E Mittelpunct des Kreises ABC (III, 9. S.)

In diesem Falle muß der Abschnitt ABC kleiner als der Halbkreis seyn, da der Mittelpunct E ausserhalb dieses Abschnittes liegt.

II. Wenn aber (Fig. 90.) $\measuredangle ABD = \measuredangle BAD$, so ist auch $AD = BD$ (I, 6. S.) Nun ist aber $AD = DC$, daher auch D der Mittelpunct des Kreises ABC (III, 9. S.)

In diesem Falle ist der Abschnitt ABC ein Halbkreis, weil AC der Durchmesser ist.

III. Wenn aber (Fig. 91.) $\measuredangle ABD < \measuredangle BAD$, so setze man an BA einen Winkel BAE, welcher dem Winkel ABD gleich ist (I, 23. S.) und ziehe EC, so wird auf vollkommen

ähnliche Art wie zuvor bewiesen, daß AE = EB = EC und folglich E der Mittelpunct des Kreises ABC ist.

In diesem Falle muß der Abschnitt ABC größer als ein Halbkreis seyn, weil sich der Mittelpunct E innerhalb des Abschnittes befindet.

Der 26. Satz.

Lehrsatz.

Wenn in gleichen Kreisen gleiche Centriwinkel oder gleiche Peripheriewinkel vorhanden sind, so stehen sie auf gleichen Bogen.

Wenn in den Kreisen (Fig. 92.) ABKC und DELF die gleichen Centriwinkel BGC und EHF oder die gleichen Peripheriewinkel BAC und EDF gegeben sind, so ist der Bogen BKC dem Bogen ELF gleich.

Beweis.

Wenn man die Linien BC und EF zieht, so ist, weil die beiden Kreise einander gleich sind,

BG = GC = EH = HF (III, 1. Erkl.) Nun ist aber

∢BGC = ∢EHF, folglich auch

BC = EF (I, 4. S.) weil aber ferner

∢BAC = ∢EDF, so sind die Segmente BAC und EDF einander ähnlich (III, 11. Erkl.), daher auch einander gleich (III, 24. S.) Da nun aber auch die ganzen Kreise einander gleich sind, so müssen es ebenso die andern Segmente BKC und ELF und folglich auch die Bogen BKF und ELF seyn.

Der 27. Satz.

Lehrsatz.

Wenn in gleichen Kreisen Centriwinkel oder Peripheriewinkel auf gleichen Bogen stehen, so sind sie einander gleich.

Wenn in den gleichen Kreisen (Fig. 93.) ABC und DEF die Centriwinkel BGC und EHF oder die Peripheriewinkel BAC

und EDF auf gleichen Bogen BC und EF stehen, so ist ∢ BGC = ∢ EHF und ∢ BAC = ∢ EDF.

Beweis.

Wenn ∢ BGC = ∢ EHF, so ist auch ∢ BAC = ∢ EDF (III, 20. S.)

Wenn nun die Winkel BGC und EHF einander ungleich wären, so sei etwa ∢ BGC > ∢ EHF. Nimmt man nun ∢ BGK = ∢ EHF, so ist Bog. BK = Bog. EF (III, 26. S.) Es ist aber Bog. BC = Bog. EF nach der Annahme; folglich müßte Bog. BC = Bog. BK seyn, welches widersprechend ist (I, 9. Gr.)

Der 28. Satz.

Lehrsatz.

In gleichen Kreisen sind die von gleichen geraden Linien abgeschnittenen Bogen einander gleich, nämlich der größere dem größern, und der kleinere dem kleinern.

Wenn in den gleichen Kreisen (Fig. 91.) ABC und DEF die Linie BC = EF ist, so muß auch Bog. BAC = Bog. EDF und Bog. BGC = Bog. EHF seyn.

Beweis.

Man nehme der gegebenen Kreise Mittelpuncte K und L, und ziehe die Linien BK, KC, EL und LF, so ist, da beide Kreise einander gleich sind,

BK = KC = EL = LF (III, 1. Erkl.)

Es ist aber auch BC = EF, folglich

∢ BKC = ∢ ELF (I, 8. S.) daher denn

Bog. BGC = Bog. EHF (III, 26. S.) und somit auch, weil beide Kreise einander gleich sind, Bog. BAC = Bog. EDF.

Der 29. Satz.

Lehrsatz.

Wenn in gleichen Kreisen gerade Linien gleiche Bogen abschneiden, so sind diese gerade Linien einander gleich.

Es seien in den gleichen Kreisen (Fig. 95.) ABC und DEF durch die Linien BC und EF die gleichen Bogen BGC und EHF abgeschnitten, so ist BC = EF.

Beweis.

Wenn man der beiden Kreise Mittelpuncte K und L nimmt, und die Linien BK, KC, EL und LF zieht, so muß

BK = KC = EL = LF seyn (III, 1. Erkl.) Da aber

Bog. BGC = Bog. EHF, so ist ∢ BKC = ∢ ELF (III, 27. S.) und daher BC = EF (I, 4. S.)

Der 30. Satz.

Aufgabe.

Einen gegebenen Kreisbogen zu halbiren.

Es sei ADB (Fig. 96.) der gegebene Kreisbogen, und man soll denselben halbiren.

Auflösung.

Man ziehe die Verbindungslinie AB, halbire sie in C (I, 10. S.), errichte aus C auf AB die CD lothrecht (I, 11. S.)

Beweis.

Da hier AC = CB, ferner

CD = CD und

∢ ACD = ∢ BCD = R, so ist, wenn die Linien AD und DB gezogen werden, auch

AD = DB (I, 4. S.) folglich auch

Bog. AD = Bog. DB (III, 28. S.)

Der 31. Satz.

Lehrsatz.

Der Winkel im Halbkreise ist ein Rechter, aber der Winkel im größern Abschnitte ist kleiner, als

ein Rechter und der Winkel im kleinern Abschnitte ist größer, als ein Rechter; auch ist der Winkel des größern Abschnittes größer und der Winkel des kleinern Abschnittes kleiner, als ein Rechter.

Es sei (Fig. 97.) ABCD der gegebene Kreis, BC sein Durchmesser, E sein Mittelpunct, auch seien BA, AC, AD und DC gezogen, so ist ∢BAC = R; aber ∢ABC < R und ∢ADC > R. Ferner ist der Winkel des größern Abschnittes, welcher vom Bogen CBA und der geraden Linie AC gebildet wird, größer als ein Rechter; der Winkel aber, welcher von dem Bogen CDA und der geraden Linie AC gebildet wird, kleiner als ein Rechter.

Beweis.

I. Man ziehe EA und verlängere BA über A nach F. Da hier EB = EA (I, 15. Erkl.) und

EA = EC, so ist auch

∢ EAB = ∢ EBA (I, 5. S.) und

∢ EAC = ∢ ECA, daher auch

∢ BAC = ∢ EBA + ∢ ECA (I, 2. Gr.)

Es ist aber ∢FAC = ∢EBA + ∢ECA (I, 32. S.) daher auch ∢BAC = ∢FAC (I, 1. Gr.) somit ∢FAC = ∢BAC = R (I, 10. Erkl.)

Oder: Da ∢ AEC = 2 ∢ BAE (I, 32. S.) und

∢ AEB = 2 ∢ EAC, so ist auch

∢ AEC + ∢ AEB = 2 ∢ BAC. Es ist aber

∢ AEC + ∢ AEB = 2R (I, 13. S.) daher auch

2 ∢ BAC = 2R und endlich

∢ BAC = R.

II. Da in dem Dreiecke ABC, nach dem Frühern,

∢ ABC + ∢ BAC < 2R (I, 32. S.) aber

∢ BAC = R, so muß auch

∢ ABC < R seyn.

III. Da nun in der vierseitigen Figur BADC, nach dem Frühern, ∢ ABC + ∢ ADC = 2R (III, 22. S.) aber

∢ ABC < R, so ist auch

∢ ADC > R.

IV. Daß der von dem Bogen CBA und der geraden Linie AC gebildete Winkel größer, als der Rechte sei, folgt offenbar daraus, daß er größer, als der rechte Winkel CAB ist.

V. Daß aber der von dem Bogen CDA und der geraden Linie AC gebildete Winkel kleiner, als ein Rechter sei, geht daraus hervor, daß er kleiner, als der rechte Winkel CAF ist.

Zusatz.

Hieraus folgt, daß, wenn in einem Dreiecke ein Winkel so groß ist, als die beiden übrigen zusammen, jener Winkel ein Rechter sei, weil sein Nebenwinkel diesen beiden andern, und daher ihm selbst gleich ist, folglich ein Rechter seyn muß (I, 10. Erkl.)

Der 32. Satz.

Lehrsatz.

Wenn eine gerade Linie den Kreis berührt, und aus diesem Berührungspuncte eine andere gerade den Kreis schneidet, so sind die Winkel, welche sie mit der berührenden Linie bildet, den Winkeln in den verwechselten Kreisabschnitten gleich.

Der Kreis (Fig. 98.) ABCD habe EF in B zur Berührungslinie, und BD sei die schneidende, so sind die Winkel, welche DB mit EF bildet, den Winkeln in den verwechselten Kreisabschnitten gleich; das heißt, der Winkel FBD ist dem Winkel in dem Abschnitte BAD, und der Winkel EBD dem Winkel in dem Abschnitte DCB gleich.

Beweis.

Man errichte auf EF aus dem Puncte B die BA lothrecht (I, 11. S.), nehme in dem Bogen BD einen willkührlichen Punct C und ziehe die geraden BC, CD und DA.

Da sich in dem Lothe BA der Mittelpunct des Kreises befindet (III, 19. S.), so ist BA des Kreises Durchmesser, und

$\measuredangle$ ADB = R (III, 31. S.) und daher

$\measuredangle$ ADB = $\measuredangle$ ABF, somit auch

$\measuredangle$ ADB = $\measuredangle$ DAB + $\measuredangle$ ABD (I, 32. S.) Folglich

$\measuredangle$ DAB + $\measuredangle$ ABD = $\measuredangle$ ABF, da aber

$\measuredangle$ ABD = $\measuredangle$ ABD, so ist

$\measuredangle$ DAB = $\measuredangle$ FBD (I, 3. Gr.) Da ferner

$\measuredangle$ FBD + $\measuredangle$ EBD = 2R (I, 13. S.) und in der vierseitigen Figur ABCD auch
$\measuredangle$ DAB + $\measuredangle$ DCB = 2R (III, 22. S.), so ist
$\measuredangle$ DAB + $\measuredangle$ DCB = $\measuredangle$ FBD + $\measuredangle$ EBD. Nun ist aber
$\measuredangle$ DAB = $\measuredangle$ FBD, daher auch
$\measuredangle$ DCB = $\measuredangle$ EBD (I, 3. Gr.)

Der 33. Satz.

Aufgabe.

Auf einer gegebenen geraden Linie einen Kreisabschnitt zu beschreiben, welcher einen gegebenen geradlinigen Winkel in sich fasset.

Wenn (Fig. 99.) AB die gegebene gerade Linie ist, so soll auf derselben ein Kreisabschnitt gebildet werden, welcher den gegebenen Winkel C in sich fasset.

Auflösung.

Der gegebene geradlinige Winkel C ist entweder ein spitzer, oder ein rechter, oder ein stumpfer Winkel.

I. Wenn $\measuredangle C < R$, so lege man an A der Linie BA den Winkel $BAD = \measuredangle C$ (I, 23. S.) wodurch $BAD < R$ ist. Nun errichte man aus A auf DA das Loth AE (I, 11. S.) halbire AB in F (I, 10. S.) errichte aus F auf AB das Loth FG, und ziehe GB.

Beweis.

Da hier AF = FB, ferner
FG = FG, und endlich
$\measuredangle$ AFG = $\measuredangle$ BFG = R, so ist
AG = GB (I, 4. S.) Nun beschreibe man aus G mit GA = GB den Kreis ABE und ziehe BE.

Da nun die AD auf dem Durchmesser AE senkrecht ist, so berührt sie den Kreis in A (III, 16. S.) und es ist
$\measuredangle$ BAD = $\measuredangle$ AEB (III, 32. S.) Allein
$\measuredangle$ BAD = $\measuredangle$ C, folglich auch
$\measuredangle$ AEB = C.

II. Wenn (Fig. 100.) $\measuredangle C = R$ ist, so setze man an BA den Winkel $BAD = \measuredangle C$ (I, 23. S.), halbire AB in F, beschreibe aus F mit FA = FB den Kreis AEB, nehme in seinem Umfange einen willkührlichen Punct E und ziehe AE und EB.

Beweis.

Es ist klar, daß AD wieder eine Tangente des Kreises (III, 16. S.) und daher ∠ BAD = ∠ C = ∠ AEB ist (III, 32. S.)

III. Wenn (Fig. 101.) ∠C > R, so setze man an BA den Winkel BAD = ∠C (I, 23. S.), errichte auf DA in A die AE lothrecht (I, 11. S.), halbire AB in F, errichte auf sie aus F die FG senkrecht, und ziehe GB. Nun ist, weil AF = FB, FG = FG und ∠ AFG = ∠ BFG = R, auch AG = BG (I, 4. S.) Daher beschreibe man aus G mit GA = GB den Kreis AEB, nehme in dem Bogen AB den willkührlichen Punct H und ziehe HA und HB.

Beweis.

Da wiederum AD auf dem Durchmesser AE lothrecht steht, so ist sie eine Tangente (III, 16. S.), folglich muß ∠ BAD = ∠ C = ∠ AHB seyn (III, 32. S.)

Der 34. Satz.

Aufgabe.

Wenn ein Kreis gegeben ist, so soll man von demselben ein Segment abschneiden, worin der Winkel einem gegebenen Winkel gleich ist.

Es sei (Fig. 102.) ABC der gegebene Kreis, von welchem ein Segment abzuschneiden ist, welches den gegebenen Winkel D enthält.

Auflösung.

Man ziehe an den gegebenen Kreis eine Tangente EBF (III, 17. S.), setze an FB im Berührungspuncte B einen Winkel FBC = ∠ D (I, 23. S.), nehme in dem Umfange BAC einen willkührlichen Punct A und ziehe die geraden Linien BA und AC.

Beweis.

Da die Linie EF eine Tangente des Kreises ABC ist, so muß auch ∠ FBC = ∠ BAC seyn (III, 32. S.) Allein

∠ FBC = ∠ D, folglich

∠ BAC = ∠ D.

Der 35. Satz.

Lehrsatz.

Wenn sich in einem Kreise zwei gerade Linien durchschneiden, so ist das Rechteck aus den Abschnitten der einen dem Rechtecke aus den Abschnitten der andern gleich.

Wenn sich in dem Kreise ABCD (Fig. 103.) die geraden Linien AC und BD im Puncte E durchschneiden, so ist das aus AE und EC zu bildende Rechteck dem Rechtecke aus BE und ED gleich.

Beweis.

I. Wenn der Durchschnittspunct der beiden Linien im Kreise sein Mittelpunct ist, wie Fig. 103., so sind die Abschnitte AE und EC, BE und ED einander gleich (I, 15. Erkl.) und es muß daher das Rechteck aus AE und EC dem Rechtecke aus BE und BC gleich seyn.

II. Wenn aber (Fig. 104.) der Durchschnittspunct E der sich schneidenden Linien AC und BD nicht der Mittelpunct des Kreises ist, so sei F dieser Mittelpunct. Zieht man nun aus F auf AC das Loth FG, und auf BD das Loth FH, und dann die Linien FB, FE und FC, so ist

AG = GC (III, 3. S.) also

Recht. aus AE u. EC + □. GE = □. GC (II, 5. S.) Aber

□. GF = □. GF. Daher

Recht. aus AE u. EC + □. GE + □. GF = □. GC + □. GF

(I, 2. Gr.) Weil aber bei G rechte Winkel sind, so ist auch

□. GE + □. GF = □. FE (I, 47. S.) und

□. GC + □. GF = □. FC, daher ist

Recht. aus AE u. EC + □. FE + □. FC.

Auf ganz ähnliche Art wird bewiesen, daß

Recht. aus DE u. EB + □. FE + □. FC, folglich ist

Recht. aus AE u. EC + □. FE = Recht. aus DE u. EB + □. FE.

Und daher auch, wenn beiderseits □. FE weggenommen wird,

Recht. aus AE u. EC = Recht. aus DE u. EB.

Der 36. Satz.

Lehrsatz.

Wenn man ausserhalb des Kreises einen willkührlichen Punct nimmt, von welchem eine den Kreis schneidende und eine andere ihn berührende Linie gezogen wird, so ist das Rechteck aus der ganzen schneidenden Linie und ihrem ausserhalb des Kreises liegenden Abschnitte dem Quadrate der berührenden Linie gleich.

Wenn vom Puncte D (Fig. 105.) die Linie DA den Kreis CBA in C und A schneidet und die Linie DB denselben in B berühret, so ist das Rechteck aus AD und DC dem Quadrate von DB gleich.

Beweis.

I. Wenn sich der Mittelpunct des Kreises, nämlich E, in der Linie DA befindet, so ziehe man die gerade EB. Hier ist

EB = EA = EC (I, 15. Erkl.) und

∠ EBD = R (III, 18. S.) Daher denn

□. ED = □. DB + □. BE (I, 47. S.) Es ist aber

Recht. aus AD u. DC + □. CE = □. ED (II, 6. S.)

oder, weil EC = EB ist,

Recht. aus AD u. DC + □. BE = □. ED. Daher

Recht. aus AD u. DC + □. BE = □. DB + □. BE.

Nimmt man nun beiderseits □. BE hinweg, so bleibt

Recht. aus AD und DC = □. DB.

II. Wenn sich aber des Kreises Mittelpunct E (Fig. 106.) nicht in der Linie DA befindet, so ziehe man aus E auf AC das Loth EF (I, 12. S.), so ist AF = FC (III, 3. S.) Zieht man ferner die Linien EB, EC und ED, so ist

Recht. aus AD u. DC + □. FC = □. FD (II, 6. S.)

Da nun □. FE = □. FE, so ist

Recht. aus AD u. DC + □. FC + □. FE = □. FD + □. FE. (I, 2. Gr.) Da aber bei F rechte Winkel sind, so ist

□. FC + □. FE = □. EC (I, 47. S.) oder

□. FC + □. FE = □. EB (I, 15. Erkl.) und

□. FD + □. FE = □. DE (I, 47. S.)

= Q. DB + Q. EB. Daher ist Recht. aus AD und DC + Q. EB = Q. DB + Q. EB, nimmt man nun beiderseits Q. EB hinweg, so bleibt Recht. aus AD und DC = Q. DB.

Der 37. Satz.

Lehrsatz.

Wenn von einem Puncte ausserhalb des Kreises zwei gerade Linien zum Kreise gehen, deren eine denselben schneidet, die andere aber ihn trifft, und es ist das Rechteck aus der ganzen schneidenden Linie und ihrem ausserhalb des Kreises liegenden Abschnitte dem Quadrate der treffenden Linie gleich, so ist diese treffende Linie eine Tangente des Kreises.

Wenn vom Puncte D (Fig. 107.) die schneidende Linie DCA und die den Kreis treffende Linie DB an denselben gehet, und es ist das Recht. aus DA und DC dem Quadrate der Linie DB gleich, so ist DB eine Tangente des Kreises ABCE.

Beweis.

Man ziehe aus D die Tangente DÉ an den Kreis (III, 17. S.), nehme des Kreises Mittelpunct F (III, 1. S.) und ziehe FE, FB und FD. Da nun die Linie DE den Kreis berührt und DA ihn schneidet, so ist Recht. aus AD u. DC = Quadr. DE (III, 36. S.) Es ist aber Recht. aus AD u. DC = Quadr. DB; daher auch Quadr. DB = Quadr. DE, und folglich

DB = DE. Es ist aber
FB = FE (I, 15. Erkl.) auch
FD = FD, daher
∢ FBD = ∢ FED (I, 8. S.) Allein
∢ FED = R, daher auch
∢ FBD = R, und folglich die DB auf BF lothrecht, und somit auch eine Tangente des Kreises ABCE (III, 16. S.) Ganz auf ähnliche Art wird der Beweis geführt, wenn sich des Kreises Mittelpunct F in der schneidenden Linie DA befindet.

Ende des dritten Buchs.

Das
vierte Buch
der
Elemente des Euclides.

Dieses Buch handelt:

1. Von der Construction des Dreiecks in und um den Kreis, und umgekehrt von Construction des Kreises in und um das Dreieck. Satz 1—5.

2. Von der Construction des Quadrates in und um den Kreis, und umgekehrt. Satz 6—9.

3. Von regelmäßigen Vielecken in und um den Kreis, und umgekehrt. Satz 10—16.

Erklärungen des vierten Buches.

---

1. Eine geradlinige Figur heißt in eine andere geradlinige Figur beschrieben, wenn der Scheitel jedes Winkels der einbeschriebenen eine Seite derjenigen berührt, worin sie beschrieben ist.

2. Eine geradlinige Figur heißt um eine andere geradlinige Figur beschrieben, wenn jede Seite der umschriebenen den Scheitel eines Winkels derjenigen berührt, um welche sie beschrieben ist.

3. Eine geradlinige Figur heißt in einen Kreis beschrieben, wenn der Scheitelpunct jedes Winkels der einbeschriebenen Figur den Umfang des Kreises berührt.

4. Eine geradlinige Figur heißt um einen Kreis beschrieben, wenn jede Seite der umschriebenen Figur den Umfang des Kreises berührt.

5. Ein Kreis heißt in eine geradlinige Figur beschrieben, wenn der Umfang des Kreises jede Seite der Figur, in welche er beschrieben ist, berührt.

6. Ein Kreis heißt um eine geradlinige Figur beschrieben, wenn der Umfang des Kreises den Scheitel jedes Winkels der Figur, um welche er beschrieben ist, berührt.

7. Eine gerade Linie heißt in einen Kreis eingetragen, wenn sich ihre Endpuncte in dem Umfange des Kreises befinden.

Der 1. Satz.

Aufgabe.

In einen gegebenen Kreis eine gegebene gerade Linie einzutragen, welche nicht größer, als sein Durchmesser ist.

Es sei (Fig. 108.) CABF der gegebene Kreis, und D die gegebene Linie, welche in denselben eingetragen werden soll.

Auflösung.

Man ziehe den Durchmesser BC. Wenn nun BC = D ist, so ist das Verlangte geschehen. Ist aber BC > D, so nehme man CE = D (I, 3. S.) beschreibe aus C mit dieser CE den Kreis AEF und ziehe die gerade CA.

Beweis.

Da C der Mittelpunct des Kreises AEF ist, so ist auch

CA = CE (I, 15. S.) Allein

CE = D, nach der Annahme;

folglich auch CA = D.

Der 2. Satz.

Aufgabe.

In einen gegebenen Kreis ein Dreieck zu beschreiben, dessen Winkel den Winkeln eines gegebenen Dreiecks, einzeln genommen, gleich sind.

Es sei (Fig. 109.) BAC der gegebene Kreis und FED das gegebene Dreieck. Man soll in den Kreis ein Dreieck ABC beschreiben, worin ∢ BAC = ∢ F, ∢ B = ∢ E, und ∢ C = ∢ D ist.

Auflösung.

Man ziehe an den gegebenen Kreis durch den willkührlichen Punct A die Tangente GAH (III, 17. S.) lege an A den ∢ HAC = ∢ E (I, 23. S.) und ∢ GAB = ∢ D, und ziehe die Verbindungslinie BC.

Beweis.

Da GAH eine Tangente des Kreises ist, so ist auch

∢ HAC = ∢ ABC (III, 32. S.) und

∢ GAB = ∢ ACB. Es ist aber

∢ HAC = ∢ E und

∢ GAB = ∢ D, folglich auch

∢ ABC = ∢ E und

∢ ACB = ∢ D (I, 1. Gr.) Daher muß auch

∢BAC = ∢F seyn (I, 32. S.) und demnach ist △ ABC gleichwinkelig mit △ FED.

Der 3. Satz.

Aufgabe.

Um einen gegebenen Kreis ein Dreieck, zu beschreiben, dessen drei Winkel den drei Winkeln eines gegebenen Dreiecks, einzeln genommen, gleich sind.

Es sei (Fig. 110.) ABC der gegebene Kreis und DEF das gegebene Dreieck. Man soll um den Kreis ein Dreieck LMN beschreiben, worin ∢L = ∢D, ∢M = ∢DEF und ∢N = ∢DFE ist.

Auflösung.

Man verlängere die EF über F und E willkührlich nach H und G, nehme des Kreises Mittelpunct K (III, 1. S.) ziehe aus K die KB willkührlich, lege an K den ∢BKA = ∢DEG, und den ∢BKC = ∢DFH (I, 23. S.) und ziehe durch A, B und C die Tangenten LAM, MBN und NCL (III, 17. S.) so sind bei A, B und C rechte Winkel (III, 18. S.)

Beweis.

Da man die vierseitige Figur AMBK durch eine Diagonale in zwei Dreiecke theilen kann, so sind ihre vier Winkel zusammengenommen = 4R (I, 32. S.) Nun ist aber

∢MAK = ∢MBK = R, folglich auch
∢AKB + ∢AMB = 2R. Da aber
∢DEG + ∢DEF = 2R (I, 13. S.) so ist auch
∢AKB + ∢AMB = ∢DEG + ∢DEF.
Allein es ist ∢AKB = ∢DEG. Daher auch
∢AMB = ∢DEF (I, 3. Gr.)

Ganz auf ähnliche Art wird bewiesen, daß
∢BNC = ∢DFE ist; folglich muß auch
∢MNL = ∢EDF seyn (I, 32. S.)

Es sind daher die beiden Dreiecke MLN und DEF gleichwinkelig.

Der 4. Satz.

Aufgabe.

In ein gegebenes Dreieck einen Kreis zu beschreiben.

Wenn (Fig. 111.) ABC das gegebene Dreieck ist, so soll in dasselbe ein Kreis beschrieben werden.

Auflösung.

Man halbire den Winkel ABC durch die Linie BD (I, 9. S.) und den Winkel BCA durch die Linie CD, so müssen diese, gehörig verlängert, in D zusammentreffen (I, 11. Gr.) Ferner ziehe man aus D auf BC das Loth DF, auf AB das Loth DE und auf AC das Loth DG.

Beweis.

Da hier $\measuredangle$ EBD $=$ $\measuredangle$ DBF, auch
$\measuredangle$ BED $=$ $\measuredangle$ BFD $=$ R und
BD $=$ BD, so ist
DE $=$ DF (I, 26. S.)

Auf ganz ähnliche Art wird auch bewiesen, daß DF $=$ DG; daher auch DE $=$ DG. Da nun DE $=$ DF $=$ DG ist, so muß der aus D mit einer dieser drei Linien beschriebene Kreis die Seite AB in E, BC in F und CA in G berühren, weil sich bei E, F und G rechte Winkel befinden (III, 16. S.)

Der 5. Satz.

Aufgabe.

Um ein gegebenes Dreieck einen Kreis zu beschreiben.

Wenn (Fig. 112.) ABC das gegebene Dreieck ist, so soll um dasselbe ein Kreis beschrieben werden.

Auflösung.

Wenn man die Linie AB in D und die Linie AC in E halbirt (I, 10. S.), und aus D auf AB das Loth DF, aus E aber auf AC das Loth EF errichtet (I, 11. S.), so müssen sich beide, gehörig verlängert, in F durchschneiden (I, 11. Gr.)

Dieser Punct F liegt entweder oberhalb der Seite BC oder in der Seite BC, oder unterhalb der Seite BC.

Beweis.

I. Wenn der Punct F über BC fällt, so ziehe man die geraden Linien FA, FB und FC. Hier ist nun

AD = DB, ferner

DF = DF, und ferner

$\underline{\sphericalangle FDA = \sphericalangle FDB = R.}$ Folglich auch

AF = FB (I, 4. S.)

Vollkommen auf eben diese Art wird bewiesen, daß AF = FC ist. Daher muß auch FB = FC seyn, und der aus F mit FA = FB = FC beschriebene Kreis geht durch die Puncte A, B und C.

II. Wenn der Punct F in BC liegt (Fig. 113.), so ziehe man die Linie FA und es kann, wie vorhin, bewiesen werden, daß FB = FA = FC ist, und folglich der aus F mit einer dieser Linien beschriebene Kreis durch die Puncte A, B und C gehen muß.

III. Wenn aber der Punct F unter BC fällt (Fig. 114.), so ziehe man wiederum die Linien FA, FB und FC.

Hier ist nun AD = DB, ferner

FD = FD, und endlich

$\underline{\sphericalangle FDA = \sphericalangle FDB}$, folglich

FA = FB (I, 4. S.)

Auf ähnliche Art wird bewiesen, daß FA = FC ist. Daher muß FB = FA = FC seyn und der aus F mit einer dieser Linien beschriebene Kreis durch die Puncte B, A und C gehen.

Zusatz.

Hieraus geht hervor: daß, wenn der Mittelpunct des Kreises über BC fällt, alsdann der Winkel BAC, als Winkel im größeren Abschnitte, kleiner als ein Rechter sei; ferner, daß, wenn der Mittelpunct in BC fällt, nunmehr der Winkel BAC, als Winkel im Halbkreise, ein Rechter sei; endlich daß, wenn der Mittelpunct unter BC fällt, alsdann der Winkel BAC, als Winkel im kleinern Abschnitte, größer als ein Rechter sei; auch umgekehrt: wenn der bemerkte Winkel BAC entweder ein spitzer

oder ein rechter, oder ein stumpfer ist, daß nunmehr der Mittelpunct des Kreises im ersten Falle oberhalb BC, im zweiten in BC, und im dritten Falle unterhalb BC liege.

Der 6. Satz.

Aufgabe.

In einen gegebenen Kreis ein Quadrat zu beschreiben.

Es sei (Fig. 115.) ABCD der gegebene Kreis, in welchen ein Quadrat beschrieben werden soll.

Auflösung.

Man ziehe die beiden Durchmesser BD und AC lothrecht auf einander (I, 11. S.) und dann die Verbindungslinien AB, BC, CD und DA.

Beweis.

Hier ist nun EB = ED (I, 15. Erkl.) ferner

EA = EA, und

$\measuredangle$ BEA = DEA = R, folglich auch

BA = AD (I, 4. S.)

Auf gleiche Art wird bewiesen, daß BA = BC und AD = DC; daher muß die vierseitige Figur ABCD gleichseitig seyn. Da aber die Linien BD und AC Durchmesser sind, so muß auch $\measuredangle$ BAD = $\measuredangle$ ADC = $\measuredangle$ DCB = $\measuredangle$ CBA = R seyn (III, 31. S.) Daher ist das Viereck ABCD auch rechtwinkelig und folglich ein Quadrat (I, 30. Erkl.)

Der 7. Satz.

Aufgabe.

Um einen gegebenen Kreis ein Quadrat zu beschreiben.

Es sei ABCD (Fig. 116.) der gegebene Kreis, um welchen das Quadrat beschrieben werden soll.

Auflösung.

Man stelle die Durchmesser BD und AC lothrecht auf einander, und ziehe durch die Puncte A, B, C und D die Tangenten FG, GH, HK und KF (III, 16. Zus.)

Beweis.

Hier sind sowohl die Winkel bei A, bei B, bei C, bei D als auch die Winkel bei E rechte Winkel (III, 18. S.) Daher sind die Linien GF, BD und HK miteinander gleichlaufend (I, 28. S.) so wie auch die Linien GH, AC und FK unter sich parallel sind. Daher muß das Viereck GFKH ein Parallelogramm seyn; auch ist $GF = HK = GH = FK = BD$ (I, 34. S.) und $\sphericalangle G = \sphericalangle F = \sphericalangle K = \sphericalangle H = R$. Folglich ist dieses Viereck gleichseitig und rechtwinkelig und daher ein Quadrat.

Der 8. Satz.

Aufgabe.

In ein gegebenes Quadrat einen Kreis zu beschreiben.

Es sei (Fig. 117.) ADCB das gegebene Quadrat, in welches der Kreis beschrieben werden soll.

Auflösung.

Man halbire die Seite AD in E und die Seite AB in F, ziehe durch E die EH gleichlaufend (I, 31. S.) mit AB und DC und durch F die FK parallel mit AD und BC.

Beweis.

Durch diese Linien entstehen vier Parallelogramme AEGF, EDKG, FGHB und GKCH. Nun ist

$AD = AB$, ferner
$AE = \frac{1}{2} AD$, und
$AF = \frac{1}{2} AB$, folglich auch
$AE = AF$, so wie auch
$FG = GE$ (I, 34. S.)

Ganz auf ähnliche Art wird bewiesen, daß $FG = GH$, und $GE = GK$ ist. Daher ist nun $GE = GK = GH = GF$ und der aus G mit einer dieser Linien beschriebene Kreis muß durch die Puncte E, K, H und F gehen. Da aber auch die Winkel bei E, bei K, bei H und bei F rechte sind, so muß der Kreis FEKH die Seiten des Quadrats ADCB berühren (III, 16. S.)

Der 9. Satz.

Aufgabe.

Um ein gegebenes Quadrat einen Kreis zu beschreiben.

Es sei (Fig. 118.) ABCD das gegebene Quadrat, um welches ein Kreis beschrieben werden soll.

Auflösung.

Wenn man die zwei Diagonalen AC und BD zieht, welche einander in E durchschneiden, so kann aus E mit EA der verlangte Kreis beschrieben werden.

Beweis.

Da hier AB = AD, ferner
CB = CD und
AC = AC, so ist auch (I, 8. S.)
∢ BAC = ∢ DAC. Da aber
∢ BAD = R, so ist auch
∢ BAC = ∢ DAC = $\frac{1}{2}$R.

Auf eben diese Art wird bewiesen, daß
∢ ABD = ∢ CBD = $\frac{1}{2}$R, daher ist auch
∢ EAB = ∢ EBA und folglich
EA = EB (I, 6. S.)

Auf gleiche Art wird bewiesen, daß auch EA = ED und EB = EC. Daher ist EA = EB = EC = ED und der aus E mit einer dieser Linien beschriebene Kreis muß durch die Puncte B, A, D und C gehen.

Der 10. Satz.

Aufgabe.

Ein gleichschenkeliges Dreieck zu bilden, worin jeder der zwei Winkel an der Grundlinie noch einmal so groß ist, als der dritte Winkel.

Man soll (Fig. 119.) ein gleichschenkeliges Dreieck FGH bilden, in welchem ∢ G = ∢ H = 2 ∢ F ist.

Auflösung.

Man ziehe eine gerade Linie AB und schneide sie so in C, daß das Rechteck aus AB und BG = Quadr. AC ist (II, 11. S.) Nun beschreibe man aus A mit AB den Kreis BDE und trage in denselben die Linie BD = AC ein (IV, 1. S.) Dann ziehe man die Linien DA und DC und beschreibe um das Dreieck ADC den Kreis ACD (IV, 5. S.), so ist, weil AB = AD (I, 15. Erkl.) das Dreieck BAD gleichschenkelig und folglich ∢ ADB = ∢ ABD (I, 5. S.)

Beweis.

Da nun Recht. AB und BC = Quadr. CA und auch
CA = BD, so ist
Recht. AB und BC = Quadr. BD und es muß die Linie BD eine Tangente des Kreises ACD seyn (III, 37. S.) Daher ist nun ∢ BDC = ∢ CAD (III, 32. S.) Allein
∢ CDA = ∢ CDA, folglich
∢ ADB = ∢ CAD + ∢ CDA. Es ist aber
(I, 32. S.) ∢ BCD = ∢ CAD + ∢ CDA, folglich auch
∢ ADB = ∢ BCD (I, 1. Gr.) Es war aber
∢ ADB = ∢ CBD, folglich ist
∢ BCD = ∢ CBD (I, 1. Gr.) Daher auch
BD = DC (I, 6. S.) Es war aber
BD = BA, folglich ist auch
DC = CA, und daher auch
∢ CAD = ∢ CDA (I, 5. S.) also
∢ BCD = 2 ∢ CAD (I, 32. S.)
Nun war aber ∢ ADB = ∢ ABD = ∢ BCD, folglich ist
∢ ADB = ∢ ABD = 2 ∢ CAD.

Der 11. Satz.

Aufgabe.

In einen gegebenen Kreis ein gleichseitiges und gleichwinkeliges Fünfeck zu beschreiben.

Es sei (Fig. 120.) ABCDE der gegebene Kreis, in welchen das gleichseitige und gleichwinkelige Fünfeck zu beschreiben ist.

Auflösung.

Man bilde ein gleichschenkeliges Dreieck FGH, worin jeder der beiden Winkel bei G und H noch einmal so groß als der Winkel bei F ist (IV, 10. S.) und beschreibe in den gegebenen Kreis ein Dreieck ADC so, daß ∢ CAD = ∢ F, ∢ ACD = ∢ G, und ∢ ADC = ∢ H ist (IV, 2. S.), so ist jeder der zwei Winkel ACD und ADC = 2 Winkel CAD. Nun halbire man ∢ ACD durch die Linie CE (I, 9. S.) und ∢ ADC durch die Linie DB, und ziehe die geraden Linien AB, BC, DE und EH.

Beweis.

Da hier ∢ CAD = ∢ ACE = ∢ ECD = ∢ CDB = ∢ BDA, so müssen auch die Bogen, worauf sie stehen, nämlich Bog. AB, Bog. BC, Bog. CD, Bog. DE und Bog. EA einander gleich seyn, so wie auch die geraden Linien AB, BC, CD, DE und EA einander gleich sind (III, 26. und 29. S.) folglich ist das Fünfeck ABCDE ein gleichseitiges.

Da nun Bog. AB = Bog. DE und
Bog. BCD = Bog. BCD, so ist auch
Bog. ABCD = Bog. BCDE, und daher auch ∢ DEA = ∢ EAB (III, 27. S.)

Ganz auf ähnliche Art wird bewiesen, daß jeder der übrigen Winkel einem der Winkel DEA oder EAB gleich ist. Daher ist ∢ ABC = ∢ BCD = ∢ CDE = ∢ DEA = ∢ EAB und das Fünfeck ABCDE ist auch gleichwinkelig.

Der 12. Satz.

Aufgabe.

Um einen gegebenen Kreis ein gleichseitiges und gleichwinkeliges Fünfeck zu beschreiben.

Es sei (Fig. 121.) ABCDE der gegebene Kreis, um welchen ein gleichseitiges und gleichwinkeliges Fünfeck beschrieben werden soll.

Auflösung.

Man denke sich in diesen Kreis ein gleichseitiges und gleichwinkeliges Fünfeck so beschrieben, daß dessen Winkelpuncte sich

bei A, B, C, D und E befinden (IV, 11. S.) Zieht man nun durch diese Puncte die Tangenten GH, HK, KL, LM und MG, so ist HGMLK das zu beschreibende Fünfeck.

Beweis.

Nimmt man des Kreises Mittelpunct F und zieht die geraden FA, FB, FC, FD und FE, so wie auch FK und FL, so ist, da sich bei B, C und D rechte Winkel befinden (III, 18. S.) nunmehr Quadr. FK = Quadr. FB + Quadr. BK und
Quadr. FK = Quadr. FC + Quadr. KC.
Es ist aber FB = FC (I, 15. Erkl.) und daher
Quadr. FB = Quadr. FC, daher auch
Quadr. BK = Quadr. KC (I, 3. Gr.) Folglich
BK = KC. Allein es ist auch
FB = FC und
FK = FK, daher denn
$\measuredangle$ BFK = $\measuredangle$ CFK; oder
$\measuredangle$ CFK = ½ $\measuredangle$ BFC.

Auf gleiche Art wird bewiesen, daß CL = LD, $\measuredangle$ CFL = $\measuredangle$ DFL, und folglich
$\measuredangle$ CFL = ½ $\measuredangle$ CFD ist.
Weil aber Bog. BC = Bog. CD (IV, 11. S.) so ist
$\measuredangle$ BFC = $\measuredangle$ CFD (III, 27. S.) daher auch
$\measuredangle$ CFK = $\measuredangle$ CFL (I, 7. Gr.) Ferner ist
FC = FC, so wie auch
$\measuredangle$ FCK = $\measuredangle$ FCL = R, daher denn
KC = CL (I, 26. S.) oder auch
KC = ½ KL.

Auf ähnliche Art wird bewiesen, daß KB = ½ KH und LD = ½ LM ist. Da aber KC = KB und CL = LD, so ist auch KL = KH (I, 6. Gr.) und KL = LM. Auf ähnliche Art wird gezeigt, daß KH = HG und LM = MG sei, daher ist KH = HG = GM = ML = LK, und das Fünfeck HGMLK ist gleichseitig.

Da nun $\measuredangle$ FBK = $\measuredangle$ FKC = R, und auch
$\measuredangle$ BFK = $\measuredangle$ CFK, so muß auch
$\measuredangle$ BKF = $\measuredangle$ CKF (I, 32. S.) und folglich
$\measuredangle$ CKF = ½ $\measuredangle$ BKC seyn.

Ebenso wird bewiesen, daß ∢ CLF = ½ CLD. Da nun
∢ FCK = ∢ FCL = R, auch ferner
∢ CFK = ∢ CFL, so ist auch
∢ CKF = ∢ CLF (I, 32. S.) folglich
∢ BKC = ∢ CLD (I, 6. Gr.)

Auf ähnliche Art wird bewiesen, daß die übrigen Winkel bei M, G und H jedem der beiden Winkel BKC und CLD gleich sind, folglich ist ∢ HGM = ∢ GML = ∢ MLK = ∢ LKH = ∢ KHG, und das Fünfeck HGMLK ist auch gleichwinkelig.

Der 13. Satz.

Aufgabe.

In ein gegebenes gleichseitiges und gleichwinkeliges Fünfeck einen Kreis zu beschreiben.

Es sei (Fig. 122.) BAEDC ein gleichseitiges und gleichwinkeliges Fünfeck, so soll in dasselbe ein Kreis beschrieben werden.

Auflösung.

Man halbire den Winkel BCD durch CF und den Winkel CDE durch DF (I, 9. S.) und ziehe aus ihrem Durchschnittspuncte F die geraden FE, FA und FB. Zieht man nun aus F auf BA das Loth FG, so ist FG der Halbmesser des zu beschreibenden Kreises.

Beweis.

Da hier BC = CD, ferner
CF = CF, und auch
∢ BCF = ∢ DCF, so ist
∢ CBF = ∢ CDF (I, 4. S.) Es ist aber
∢ CDF = ½ ∢ CDE = ½ ∢ CBA, daher auch
∢ CBF = ½ ∢ CBA und es wird folglich der ∢ CBA durch die Linie BF halbirt.

Auf gleiche Art wird gezeigt, daß ∢ BAE durch AF, und ∢ AED durch EF halbirt wird.

Fällt man nun aus F auf die Seite des Fünfecks die Lothe FH, FK, FL und FM, so ist

$\sphericalangle$ FHC $=$ $\sphericalangle$ FKC $=$ R. Es war aber
$\sphericalangle$ HCF $=$ $\sphericalangle$ KCF, und es ist
CF $=$ CF, daher muß
FH $=$ FK seyn (I, 26. S.)

Auf dieselbe Art wird bewiesen, daß jedes der übrigen Lothe FL, FM und FG jedem der Lothe FH und FK gleich ist. Folglich ist FG $=$ FM $=$ FL $=$ FK $=$ FH, und der aus F mit FG beschriebene Kreis muß durch die Puncte G, M, L, K und H gehen; und, weil bei diesen Puncten rechte Winkel sind, die Seiten des Fünfecks in diesen Puncten berühren.

Der 14. Satz.

Aufgabe.

Um ein gegebenes gleichseitiges und gleichwinkeliges Fünfeck einen Kreis zu beschreiben.

Es sei (Fig. 123.) BAEDC das gleichseitige und gleichwinkelge Fünfeck, um welches ein Kreis beschrieben werden soll.

Auflösung.

Man halbire den $\sphericalangle$ BCD durch CF und den $\sphericalangle$ CDE durch DF, welche im Puncte F zusammentreffen, und es ist FC die Linie, mit welcher aus dem Puncte F der verlangte Kreis beschrieben werden kann.

Beweis.

Wenn man die Linien FB, FA und FE zieht, so wird hier, wie zuvor (IV, 13. S.) bewiesen, daß durch diese Linien auch die übrigen Winkel des Fünfecks halbirt werden, wodurch denn die entstehenden Hälften alle einander gleich sind. Es muß demnach $\triangle$ CFB $=$ $\triangle$ BFA $=$ $\triangle$ AFE $=$ $\triangle$ EFD $=$ $\triangle$ DFC seyn (I, 6. S.) Daher ist auch FC $=$ FB $=$ FA $=$ FE $=$ FD und der aus F mit FC beschriebene Kreis muß durch die Vieleckspuncte C, B, A, E und D gehen.

Der 15. Satz.

Aufgabe.

In einen gegebenen Kreis ein gleichseitiges und gleichwinkeliges Sechseck zu beschreiben.

Es sei (Fig. 124.) ACEF der gegebene Kreis, in welchen ein gleichseitiges und gleichwinkeliges Sechseck beschrieben werden soll.

Auflösung.

Wenn G der Mittelpunct des Kreises ist, so ziehe man einen Durchmesser AGD, beschreibe aus D mit DG den Kreis EGCH, ziehe EG und verlängere sie nach B, so wie auch CG, welche nach F verlängert wird. Endlich ziehe man die geraden AB, BC, AF und FE.

Beweis.

Da hier DE = DG (I, 15. Erkl.) und ebenso DG = GE, so ist das Dreieck GED gleichseitig und daher auch gleichwinkelig (I, 5. S.) und jeder seiner drei Winkel so groß, als der dritte Theil von zwei Rechten (I, 32. S.) Eben dieses gilt auch vom gleichseitigen Dreiecke GCD.

Da nun $\measuredangle$ EGD = $\measuredangle$ CGD = $\frac{2R}{3}$, so ist auch

$\measuredangle$ CGB = $\frac{2R}{3}$ (I, 13. S.) daher ist $\measuredangle$ EGD = $\measuredangle$ CGD = $\measuredangle$ CGB.

Da aber jeder dieser Winkel auch seinem Scheitelwinkel gleich ist, so ist auch $\measuredangle$ EGD = $\measuredangle$ DGC = $\measuredangle$ CGB = $\measuredangle$ BGA = $\measuredangle$ AGF = $\measuredangle$ FGE (I, 15. S.) Da aber auch GE = GF = GA = GB = GC = GD (I, 15. Erkl.) so ist auch $\triangle$ DGE = $\triangle$ EGF = $\triangle$ FGA = $\triangle$ AGB = $\triangle$ BGC = $\triangle$ CGD (I, 4. S.) daher muß $\measuredangle$ DEF = $\measuredangle$ EFA = $\measuredangle$ FAB = $\measuredangle$ ABC = $\measuredangle$ BCD = $\measuredangle$ CDE und folglich das Sechseck ABCDEF ein gleichseitiges und gleichwinkeliges seyn.

Zusatz.

Hieraus ist klar, daß die Seite des gleichwinkeligen und gleichseitigen Sechsecks dem Halbmesser des Kreises gleich sei,

in welchem es beschrieben ist. Auch geht hieraus hervor, daß man durch Tangenten, welche durch die Puncte A, B, C, D, E und F gelegt werden, auf ähnliche Art ein gleichseitiges und gleichwinkeliges Sechseck um den Kreis beschreiben könne, wie dieses früher für das gleichseitige und gleichwinkelige Fünfeck (IV, 12. S.) geschehen ist. Auch kann ebenso, wie bei dem gleichseitigen und gleichwinkeligen Fünfecke gezeigt worden ist, sowohl in als um einen gegebenen Kreis ein gleichseitiges und gleichwinkeliges Sechseck beschrieben werden.

Der 16. Satz.

Aufgabe.

In einen gegebenen Kreis ein gleichseitiges und gleichwinkeliges Fünfzehneck zu beschreiben.

Es sei (Fig. 126.) ABCD der gegebene Kreis, in welchen ein gleichseitiges und gleichwinkeliges Fünfzehneck beschrieben werden soll.

Auflösung und Beweis.

Es sei AC die Seite des in den gegebenen Kreis beschriebenen gleichseitigen Dreiecks, und AB die Seite des in denselbigen Kreis beschriebenen gleichseitigen und gleichwinkeligen Fünfecks (IV, 11. S.) Denkt man sich nun dieses Kreises Umfang in fünfzehn gleiche Theile getheilt, so enthält der Bogen ABC, als der dritte Theil dieses Umfangs, fünf solcher Theile; der Bogen AB aber, als der fünfte Theil dieses Umfanges, drei solcher Theile. Daher muß der Bogen BC, als der Unterschied der zwei ebenbemerkten Bogen, zwei solcher Theile enthalten. Wird daher dieser Bogen BC in E halbirt (III, 30. S.), so ist Bogen BE sowohl als Bogen EC einer dieser Theile. Wird nun die gerade Linie EC gezogen, so kann man noch vierzehn ihr gleiche gerade Linien in dem Umfange des Kreises umhertragen (IV, 1. S.) und das hiedurch in dem Kreise entstehende Fünfzehneck muß gleichseitig seyn. Da aber auch jeder seiner Winkel auf demselbigen Bogen steht, so ist dieses Fünfzehneck auch gleichwinkelig (III, 27. S.)

Zusatz.

Auf gleiche Art, wie bei dem gleichseitigen und gleichwinkeligen Fünfecke, wird auch ein gleichseitiges und gleichwinkeliges Fünfzehneck um einen gegebenen Kreis oder ein Kreis in oder um ein gegebenes gleichseitiges und gleichwinkeliges Fünfzehneck beschrieben.

Ende des vierten Buchs.

Das
sechste Buch
der
Elemente des Euclides.

Dieses Buch handelt:

1. Von jenen Proportionallinien, welche bei dem Dreiecke und Parallelogramme entstehen, wenn diese Figuren auf bestimmte Art geschnitten oder verbunden werden. Satz 1—17.

2. Von der Aehnlichkeit dreieckiger und mehrseitiger Figuren, nebst Anwendungen davon. Satz 18—33.

(Man sehe, was in den Anmerkungen zu diesem Buche als Vorerinnerung [CLX.] bemerkt worden ist.)

Erklärungen des sechsten Buches.

1. Geradlinige Figuren sind einander ähnlich, wenn alle Winkel, einzeln genommen, einander gleich und die Seiten, welche diese Winkel bilden, einander proportional sind.

2. In geradlinigen Figuren stehen die Seiten im umgekehrten Verhältnisse, wenn sich eine Seite der ersten Figur so zu einer Seite der zweiten verhält, wie eine andere Seite der zweiten Figur zu einer andern Seite der ersten.

3. Eine gerade Linie heißt nach stetiger Proportion getheilt, wenn sich die ganze Linie zu ihrem größern Abschnitte verhält, wie sich dieser größere Abschnitt zum kleinern Abschnitte verhält.

4. Die Höhe einer Figur ist ein Loth, welches von ihrer Spitze auf ihre Grundlinie gezogen wird.

5. Wenn zwei oder mehrere Verhältnisse die Eigenschaft haben, daß immer das zweite Glied eines vorhergehenden zugleich auch das erste Glied des nächstfolgenden ist, so sagt man, das Verhältniß des ersten Gliedes im ersten zum letzten Gliede des letzten Verhältnisses, sei aus allen diesen Verhältnissen, oder aus solchen, die ihnen gleich sind, zusammengesetzt.

Der 1. Satz.

Lehrsatz.

Wenn zwei Dreiecke oder zwei Parallelogramme einerlei Höhe haben, so verhalten sie sich, wie ihre Grundlinien.

Wenn die Dreiecke (Fig. 127.) ABC und ACD oder die Parallelogramme EACB und AFDC einerlei Höhe AC haben,

so verhalten sie sich wie ihre Grundlinien BC und CD, das heißt, es ist △ ABC : △ ACD = BC : CD und

EACB : AFDC = BC : CD.

Beweis.

Man verlängere die Linie BD über B und D nach H und L, nehme BG = GH (und so viele Linien man will) = CB. Desgleichen nehme man DK = KL (und so viele Linien man will) = CD und ziehe die Verbindungslinien AG, AH, AK und AL.

I. Da hier CB = BG = GH, so ist auch

△ ACB = △ ABG = △ AGH (I, 38. S.)

Da ferner CD = DK = KL, so ist auch

△ ACD = △ ADK = △ AKL.

Daher ist HC und △ AHC von BC und △ ABC, und aus eben diesem Grunde auch LC und △ ALC von CD und △ ADC ein Gleichvielfaches. Nun ist aber,

wenn HC = LC, auch △ AHC = △ ALC, wenn aber HC < LC, auch △ AHC < ALC, und wenn HC > LC, auch △ AHC > △ ALC (I, 38. S.)

folglich ist △ ABC : △ ACD = BC : CD.

II. Nun ist aber auch

EACB = 2 △ ABC und

AFDC = 2 △ ACD (I, 41. S.) folglich

EACB : AFDC = 2 △ ABC : 2 △ ACD, oder:

EACB : AFDC = △ ABC : △ ACD.

Es ist aber △ ABC : △ ACD = BC : CD (I.) folglich auch

EACB : AFDC = BC : CD.

Der 2. Satz.

Lehrsatz.

Wenn mit einer Dreiecksseite eine gerade Linie durch das Dreieck parallel geht, so schneidet sie die übrigen Seiten des Dreiecks proportional, und wenn zwei Seiten eines Dreiecks von einer geraden Linie im Dreiecke proportional geschnit-

ten werden, so ist diese gerade Linie mit der dritten Seite des Dreiecks gleichlaufend.

Es sei (Fig. 128.) in dem Dreiecke ACB die ED mit CB gleichlaufend, so ist CE : EA = BD : DA, und wenn

BD : DA = CE : EA ist, so muß die Verbindungslinie ED mit CB gleichlaufend seyn.

Beweis.

I. Man ziehe die Verbindungslinien EB und DC, so ist, weil DE für die Dreiecke DEC und EDB gemeinschaftliche Grundlinie, auch CB mit ED parallel ist,

△ BDE = △ CED (I, 37. S.) Da nun

△ ADE = △ ADE, so ist auch

△ BDE : △ ADE = △ CDE : △ ADE.

Es ist aber △ BDE : △ ADE = BD : DA (VI, 1. S.)

Daher △ CDE : △ ADE = BD : DA. Allein

△ CDE : △ ADE = CE : EA (VI, 1. S.)

Daher BD : DA = CE : EA.

II. Wenn aber BD : DA = CE : EA ist, so ist auch

BD : DA = △ BDE : △ ADE,

folglich CE : EA = △ BDE : △ ADE.

Allein CE : EA = △ CDE : △ ADE,

folglich △ BDE : △ ADE = △ CDE : △ ADE.

Es ist aber △ ADE = △ ADE, folglich auch

△ BDE = △ CDE, allein die beiden gleichen Dreiecke BDE und CDE haben die Grundlinie ED gemein, folglich muß auch CB mit ED parallel seyn (I, 39. S.)

Der 3. Satz.

Lehrsatz.

Wenn der Winkel eines Dreiecks halbirt wird und die Theilungslinie auch die Grundlinie schneidet, so sind die zwei Abschnitte der Grundlinie den übrigen Seiten des Dreiecks proportional; und wenn die Abschnitte der Grundlinie eines Dreiecks seinen übrigen Seiten proportional sind, so hal-

birt die gerade Linie von der Spitze nach dem Theilpuncte der Grundlinie den Winkel an der Spitze.

Es sei (Fig. 129.) ABC das gegebene Dreieck und der ∢ BAC werde durch AD halbirt, so ist BD : DC = BA : AC und wenn diese Proportion statt findet, so ist ∢ BAC durch AD halbirt.

Beweis.

I. Man ziehe durch C die Linie CE mit DA gleichlaufend (I, 31. S.) und verlängere BA über A, bis sie diese Parallele in E schneidet, so ist

∢ ACE = ∢ CAD (I, 29. S.) und
∢ CEA = ∢ DAB. Nun ist aber
∢ CAD = ∢ DAB nach der Annahme; also
∢ ACE = ∢ CEA und daher
AE = AC (I, 6. S.)

Weil aber im Dreiecke EBC die AD mit EC gleichlaufend ist, so hat man

BD : DC = BA : AE (VI, 2. S.) Allein
AE = AC. Daher auch
BD : DC = BA : AC.

II. Wäre nun BD : DC = BA : AC, so ist, weil in dem Dreiecke EBC die AD mit EC parallel läuft, auch

BD : DC = BA : AE (VI, 2. S.) daher wird
BA : AE = BA : AC. Somit auch
AE = AC, und folglich
∢ AEC = ∢ ACE (I, 5. S.) Es ist aber
∢ AEC = ∢ BAD (I, 29. S.) und
∢ ACE = ∢ DAC, daher auch
∢ BAD = ∢ DAC.

Der 4. Satz.

Lehrsatz.

Wenn in zwei Dreiecken die Winkel, einzeln genommen, einander gleich sind, so sind die Seiten welche gleiche Winkel einschließen, einander pro-

portional, und die, welche gleichen Winkeln gegenüberliegen, homolog.

Es seien (Fig. 130.) in den Dreiecken ABC und DCE die Winkel, einzeln genommen, einander gleich, so ist

BA : AC = CD : DE
AB : BC = DC : CE und
AC : CB = DE : EC.

Beweis.

Wenn man die Seite BC des Dreiecks ABC mit der Seite CE des Dreiecks DCE in eine gerade Linie BCE bringt, so ist, da

$\sphericalangle$ ABC + $\sphericalangle$ ACB < 2 R (I, 17. S.) und
$\sphericalangle$ ACB = $\sphericalangle$ DEC, nunmehr auch
$\sphericalangle$ ABC + $\sphericalangle$ DEC < 2 R.

Daher müssen die Linien BA und ED, wenn jene über A und diese über D verlängert wird, einander in F durchschneiden (I, 11. Gr.)

Da nun $\sphericalangle$ DCE = $\sphericalangle$ ABC und
$\sphericalangle$ ACB = $\sphericalangle$ DCE, so ist die Seite BF mit CD und die Seite AC mit FE parallel (I, 28. S.), folglich ist AFDC ein Parallelogramme und daher

FA = CD und AC = DF (I, 34. S.)

Weil aber AC mit FE und BF mit CD gleichlaufend ist, so hat man BA : AF = BC : CE und
BC : CE = FD : DE (VI, 2. S.) folglich ist auch
BA : CD = BC : CE und BC : CE = AC : DE,
folglich BA : BC = CD : CE und
BC : AC = CE : DE, daher auch
BA : AC = CD : DE.

Der 5. Satz.

Lehrsatz.

Wenn zwei Dreiecke proportionale Seiten haben, so haben sie, einzeln genommen, gleiche Winkel, und die Winkel, welche homologen Seiten gegenüberliegen, sind einander gleich.

Es sei in den Dreiecken (Fig. 131.) ABC und DEF

AB : BC = DE : EF, ferner

BC : CA = EF : FD, und endlich

BA : AC = ED : DF, so ist

$\measuredangle$ ABC = $\measuredangle$ DEF; $\measuredangle$ BCA = $\measuredangle$ EFD, und

$\measuredangle$ BAC = $\measuredangle$ EDF.

Beweis.

Man lege an die Seite FE den Winkel FEG = $\measuredangle$ ABC (I. 23. S.) und an EF den Winkel EFG = $\measuredangle$ BCA, so ist auch $\measuredangle$ EGF = $\measuredangle$ BAC (I, 32. S.) Daher sind die Dreiecke ABC und GEF gleichwinkelig und es ist

AB : BC = GE : EF (VI, 4. S.) Allein es ist

AB : BC = DE : EF nach der Annahme, folglich ist

DE : EF = GE : EF oder auch

DE : GE = EF : EF und daher

DE = GE.

Auf gleiche Art wird bewiesen, daß DF = GF ist. Da nun die Dreiecke DEF und GEF auch noch die Seite EF gemein haben, so ist

$\measuredangle$ DEF = $\measuredangle$ GEF = $\measuredangle$ ABC (I, 8. S.) ferner

$\measuredangle$ DFE = $\measuredangle$ GFE = $\measuredangle$ ACB und auch

$\measuredangle$ EDF = $\measuredangle$ EGF = $\measuredangle$ BAC.

Der 6. Satz.

Lehrsatz.

Wenn in zwei Dreiecken ein Winkel des einen einem Winkel des andern gleich ist und die Seiten, welche diese Winkel bilden, einander proportional sind, so sind auch jene Winkel in beiden Dreiecken einander gleich, welche den homologen Seiten gegenüber liegen.

Es sei in den Dreiecken (Fig. 132.) ABC und DEF der $\measuredangle$ BAC = $\measuredangle$ EDF und ferner BA : AC = ED : DF, so ist auch $\measuredangle$ ABC = $\measuredangle$ DEF und $\measuredangle$ ACB = $\measuredangle$ DFE.

Beweis.

Man lege an FD den Winkel FDG = ∠ BAC = ∠ EDF (I, 23. S.) und an DF den ∠ DFG = ∠ ACB, so muß auch ∠ DGF = ∠ ABC seyn (I, 32. S.) Daher sind die Dreiecke ABC und DGF gleichwinkelige und es ist

BA : AC = GD : DF (VI, 4. S.) Es ist aber

BA : AC = ED : DF nach der Annahme, daher auch

ED : DF = GD : DF und

ED : GD = DF : DF, folglich ist

ED = GD. Es ist aber, ferner

DF = DF und ∠ EDF = ∠ GDF, daher

∠ DFE = ∠ DFG = ∠ ACB (I, 4. S.) und

∠ DEF = ∠ DGF = ∠ ABC.

Der 7. Satz.

Lehrsatz.

Wenn in zwei Dreiecken ein Winkel des einen einem Winkel des andern gleich ist, und die Seiten, von welchen andere Winkel eingeschlossen werden, einander proportional sind, auch von den noch übrigen Winkeln jeder zugleich entweder kleiner oder nicht kleiner, als ein Rechter ist, so sind die Dreiecke gleichwinkelig, und die Winkel, welche von proportionirten Seiten eingeschlossen werden, einander gleich.

Es sei in den Dreiecken (Fig. 133.) ABC und

DEF der ∠ BAC = ∠ EDF, ferner

AB : BC = DE : EF, auch jeder von den noch übrigen Winkeln ACB und DFE zugleich entweder kleiner, oder nicht kleiner, als ein Rechter, so sind die Dreiecke gleichwinkelig, und es ist ∠ ABC = ∠ DEF.

Beweis.

I. Es sei jeder der beiden Winkel ACB und DFE kleiner als ein Rechter.

Wären diese Winkel ABC und DEF einander nicht gleich, so müßte einer von ihnen, etwa ∢ ABC, der größere seyn. Es sei daher

∢ ABG = ∢ DEF (I, 23. S.) so ist, weil
∢ BAC = ∢ EDF nunmehr auch
∢ AGB = ∢ DFE (I, 32. S.) Daher sind die Dreiecke ABG und DEF gleichwinkelig, und es ist
AB : BG = DE : EF (VI, 4 S.) Es war aber
AB : BC = DE : EF nach der Annahme; folglich ist
AB : BC = AB : BG, oder
AB : AB = BC : BG und daher
BC = BG und ∢ BCG = ∢ BGC (I, 5. S.)
Es ist aber ∢ BGC < R nach der Annahme; daher auch
∢ BGC < R und demnach
∢ AGB > R (I, 13. S.) Es ist aber
∢ AGB = ∢ DFE, folglich wäre
∢ DFE > R, welches der Annahme, daß Winkel DFE < R widerspricht. Daher ist
∢ ABC = ∢ DEF; es war aber
∢ BAC = ∢ EDF, folglich ist auch
∢ ACB = ∢ DFE und die Dreiecke ABC und DEF sind gleichwinkelig.

II. Es sei nunmehr jeder der zwei Winkel ACB und DFE nicht kleiner, als ein Rechter, so kann auf ähnliche Art bewiesen werden, daß, wenn diese Winkel ABC und DEF einander nicht gleich wären, sondern, wenn Winkel ABC größer, als Winkel DEF wäre, nun wieder ∢ BCG = ∢ BGC seyn müßte. Da aber ∢ BGC nicht kleiner als ein Rechter ist, so wäre auch ∢ BCG nicht kleiner, als ein Rechter und es müßten in dem Dreiecke BGC die ebengenannten Winkel nicht kleiner, als zwei Rechte seyn, welches widersprechend ist (I, 17. S.) Daher ist ∢ ABC = ∢ DEF, es war aber
∢ BAC = ∢ EDF, folglich ist auch
∢ ACB = ∢ DFE (I, 32. S.) und die Dreiecke ABC und DEF sind wiederum gleichwinkelig.

Der 8. Satz.

Lehrsatz.

Wenn man in einem rechtwinkeligen Dreiecke vom Scheitel des rechten Winkels ein Loth auf die gegenüberliegende Seite zieht, so sind die zwei, an beiden Seiten dieses Lothes liegenden Dreiecke, sowohl unter sich, als auch dem ganzen Dreiecke ähnlich.

Wenn in dem rechtwinkeligen Dreiecke (Fig. 134.) BAC aus A auf BC das Loth AD gezogen wird, so ist das Dreieck ABD dem Dreiecke ACD und dem Dreiecke ABC ähnlich.

Beweis.

I. Da hier $\measuredangle$ BAC $=$ $\measuredangle$ ADB $=$ R und

$\measuredangle$ ABC sowohl dem Dreiecke ABC als auch dem Dreiecke ABD angehört, so ist auch $\measuredangle$ ACB $=$ $\measuredangle$ BAD (I, 32. S.) Daher sind die beiden Dreiecke ABC und ABD gleichwinkelig, folglich ihre Seiten proportional (VI, 4. S.) und die Dreiecke selbst einander ähnlich (VI, 1. Erkl.) Ganz auf ähnliche Art wird bewiesen, daß auch die Dreiecke ABC, und ADC einander ähnlich sind. Daher sind auch die Dreiecke ABD und ADC dem Dreiecke ABC ähnlich.

II. Da $\measuredangle$ ADB $=$ $\measuredangle$ ADC $=$ R und

$\measuredangle$ BAD $=$ $\measuredangle$ ACB nach dem Obigen, so ist auch $\measuredangle$ ADB $=$ $\measuredangle$ DAC (I, 32. S.) Daher sind die Dreiecke ADB und ADC gleichwinkelige, folglich auch ihre Seiten proportional (VI, 4. S.) und beide Dreiecke selbst einander ähnlich (VI, 1. Erkl.)

Zusatz.

Hieraus folgt, daß in dem rechtwinkeligen Dreiecke das von dem rechten Winkel nach der Grundlinie gefällte Loth zwischen den Abschnitten dieser Grundlinie, und die an jedem Abschnitte liegende Seite zwischen der Grundlinie und diesem Abschnitte die mittlere Proportionallinie ist. Man hat nämlich

BD : AD $=$ AD : DC, ferner

BC : BA $=$ BA : BD und endlich

BC : CA $=$ CA : CD.

Der 9. Satz.

Aufgabe.

Von einer gegebenen geraden Linie einen bestimmten Theil abzuschneiden.

Es sei (Fig. 135.) die gerade Linie AB gegeben, von welcher ein bestimmter Theil abgeschnitten werden soll.

Auflösung.

Es werde von der Linie AB der dritte Theil verlangt, so ziehe man an BA die gerade AC unter willkührlichem Winkel BAC, nehme auf AC einen beliebigen Punct D, und mache DE = EC = AD. Wird nun die Verbindungslinie CB und durch D mit CB die gleichlaufende DF gezogen (I, 31. S.) so ist AF der dritte Theil von AB.

Beweis.

Da in dem Dreiecke ABC die Linie FD mit BC gleichlaufend ist, so hat man

CD : DA = BF : FA, (VI, 2. S.) Es ist aber

CD = 2 DA, folglich auch

BF = 2 FA und daher

BA = 3 FA, oder AF = $\frac{1}{3}$ AB.

Der 10. Satz.

Aufgabe.

Eine gegebene gerade Linie so zu theilen, daß ihre Abschnitte den Abschnitten einer gegebenen getheilten Linie proportional sind.

Es sei (Fig. 136.) die Linie AB in drei Theile zu theilen, welche den Theilen AD, DE und EC der getheilten Linie AC proportional sind.

Auflösung.

Man lege die in D und E getheilte Linie AC unter einem willkührlichen Winkel an die zu theilende Linie BA, ziehe die Verbindungslinie CB, und durch E die EG, durch D die DF mit CB

gleichlaufend, so wie auch die DK parallel mit AB, so sind AF FG und GB die zu findenden Abschnitte der Linie AB.

Beweis.

Da hier sowohl FDHG als GHKB Parallelogramme sind, so ist DH = FG und HK = GB (I, 34. S.) Weil aber in dem Dreiecke DKC die KC mit HE gleichlaufend ist, so hat man

CE : ED = KH : HD (VI, 2. S.). Daher auch

CE : ED = BG : GF. Da nun in dem Dreiecke AGE die GE mit FD parallel ist, so hat man

ED : DA = GF : FA. (VI, 2. S.) folglich ist

AD : DE : EC = AF : FG : GB.

Der 11. Satz.

Aufgabe.

Zu zwei gegebenen geraden Linien die dritte Proportionallinie zu finden.

Es sei (Fig. 137.) AB und AC die zwei gegebenen Linien, zu welchen man die dritte Proportionale finden soll.

Auflösung.

Man setze die gegebenen Linien AB und AC unter einem willkührlichen Winkel A zusammen, verlängere AB über B bis BD = AC, ziehe BC und verlängere AC über C bis die durch D mit BC parallele DE sie in E schneidet. (I, 31. S.)

Beweis.

Da in dem Dreiecke AED die CB parallel mit ED ist, so hat man

AB : BD = AC : CE (VI, 2. S.) Es ist aber

BD = AC, folglich auch

AB : AC = AC : CE, und CE die zu findende dritte Proportionallinie.

Der 12. Satz.

Aufgabe.

Zu drei gegebenen geraden Linien die vierte Proportionallinie zu finden.

Es seien (Fig. 138.) A, B und C die drei gegebenen geraden Linien, zu welchen die vierte Proportionallinie zu finden ist.

Auflösung.

Man setze zwei willkührliche Linien ED und DF unter einem beliebigen Winkel EDF zusammen, mache DG = A, GE = B, DH = C, ziehe die Verbindungslinie GH und durch E eine der GH parallele Linie GF (I, 31. S.)

Beweis.

Da hier in dem Dreiecke DEF die GH mit EF parallel ist, so hat man

DG : GE = DH : HF (VI, 2. S.) Es war aber DG = A, GE = B, und DH = C, folglich ist

A : B = C : HF, und HF die zu findende Proportionale.

Der 13. Satz.

Aufgabe.

Zu zwei gegebenen geraden Linien die mittlere Proportionallinie zu finden.

Es seien (Fig. 139.) AB und BC die gegebenen zwei Linien, zu welchen eine mittlere Proportionale zu finden ist.

Auflösung.

Man lege die gegebenen Linien AB und BC in eine gerade Linie ABC, beschreibe über AC den Halbkreis ADC, und errichte aus B auf AC das Loth BD (I, 11. S.), so ist BD die zu findende Linie.

Beweis.

Wenn man die Verbindungslinien AD und DC zieht, so ist ∢ ADC = R, (III, 31. S.) Da nun DB das Loth vom rechten Winkel auf die Grundlinie AC ist, so ist auch BD die mittlere Proportionallinie zu AB und BC. (VI, 8. Zus.) oder

AB : BD = BD : BC.

Der 14. Satz.

Lehrsatz.

Wenn zwei Parallelogramme einander gleich sind, und ein Winkel des einen einem Winkel

des andern gleich ist, so sind die Seiten, welche die gleichen Winkel bilden, im umgekehrten Verhältnisse. Und wenn in zwei Parallelogrammen ein Winkel des einen einem Winkel des andern gleich ist, und die Seiten welche diese Winkel bilden, im umgekehrten Verhältnisse sind, so sind die Parallelogramme einander gleich.

Es seien (Fig. 140.) FADB und EBGC zwei gleiche Parallelogramme, worin $\measuredangle$ FBD $=$ $\measuredangle$ EBG, so ist

BD : BE = GB : BF. Wenn aber

$\measuredangle$ FDB $=$ $\measuredangle$ EBG, und

DB : BE = GB : BF ist, so sind die Parallelogramme FADB und EBGC einander gleich.

Beweis.

I. Wenn FADB = EBGC, so lege man BD und EB in eine gerade Linie EBD, so müssen auch die Linien FB und BG eine gerade Linie FBG bilden, (I, 14. S.) Wird nun das Parallelogramm FBEH vollendet, so ist, weil FADB = EBGC, nun auch FADB : HFBE = EBGC : HFBE nun ist

FADB : HFBE = BD : EB (VI, 1. S.) und

EBGC : HFBE = GB : BF, folglich auch

BD : EB = GB : BF.

II. Wenn aber DB : BE = GB : BF ist, so hat man

DB : BE = FADB : HFBE (VI, 1. S.)

und GB : BF = EBGC : HFBE, folglich

auch FADB : HFBE = EBGC : HFBE oder

FADB : EBGC = HFBE : HFBE, daher

FADB = EBGC.

Der 15. Satz.

Lehrsatz.

Wenn zwei Dreiecke einander gleich sind, und ein Winkel des einen gleich ist einem Winkel des andern, so sind die Seiten, welche die gleichen Winkel bilden, einander umgekehrt proportional;

und wenn in zwei Dreiecken ein Winkel des einen gleich ist einem Winkel des andern und die Seiten, welche diese Winkel bilden, im umgekehrten Verhältnisse stehen, so sind die Dreiecke einander gleich.

Es seien (Fig. 141.) die Dreiecke BAC und DAE einander gleich, auch ∢ BAC = ∢ DAE, so ist CA : AD = EA : AB, und wenn ∢ BAC = ∢ DAE auch CA : AD = EA : AB ist, so ist auch △ CAB = △ EAD.

Beweis.

I. Es sei △ ABC = △ ADE. Bringt man hier CA und AD in eine gerade Linie CAD, so liegen auch EA und AB in einer geraden Linie (I, 14. S.) Zieht man die Verbindungslinie BD, so ist, weil △ ACB = △ ADE, nun auch

△ ACB : △ BAD = △ ADE : △ BAD. Allein

△ ABC : △ BAD = CA : AD folglich

△ ADE : △ BAD = CA : AD aber

△ ADE : △ BAD = EA : AB folglich

CA : AD = EA : AB.

II. Es sei CA : AD = EA : AB Hier ist nun

CA : AD = △ ABC : △ BAD (VI, 1. S.)

folglich EA : AB = △ ABC : △ BAD. Da nun

EA : AB = △ ADE : △ BAD, so ist

△ ABC : △ BAD = △ ADE : △ BAD oder

△ ABC : △ ADE = △ BAD : △ BAD folglich auch

△ ABC = △ ADE.

Der 16. Satz.

Lehrsatz.

Wenn vier gerade Linien einander proportional sind, so ist das von der ersten und vierten gebildete Rechteck dem Rechtecke aus der zweiten und dritten gleich. Und wenn das Rechteck aus der ersten und vierten dem Rechtecke aus der zweiten und dritten gleich ist, so sind die vier gerade Linien proportional.

Es seien (Fig. 142.) die geraden Linien AB, CD, E und F proportional, so daß AB : CD = E : F, so ist das Rechteck aus AB und F dem Rechtecke aus CD und E gleich. Und wenn das Rechteck aus AB und F dem Rechtecke aus CD und E gleich ist, so ist auch AB : CD = E : F.

Beweis.

I. Es sei AB : CD = E : F. Errichtet man nun auf BA in A das Loth AG = F (I, 11. S.) und auf DC in C das Loth CH = E, und vollendet die Parallelogramme GKBA und HLDC, so ist, weil AB : CD = E : F nun auch

AB : CD = CH : AG. Es ist aber auch

∢ BAG = ∢ DCH = R, folglich

GKBA = BLDC (VI, 14. S.)

Daher ist das Rechteck aus AB und F dem Rechtecke aus CD und E gleich.

II. Es sei das Rechteck aus AB und F dem Rechtecke aus CD und E gleich, oder, welches einerlei ist, das Parallelogramm GKBA dem Parallelogramme HLDC, so ist, weil

∢ GAB = ∢ HCD = R, nun auch

AB : CD = CH : AG (VI, 14. S.) Allein

CH = E und AG = F, folglich auch

AB : CD = E : F.

Der 17. Satz.

Lehrsatz.

Wenn drei gerade Linien eine Proportion bilden, so ist das Rechteck aus den zwei äußersten dem Quadrate der mittlern gleich, und wenn das Rechteck aus den äußersten dem Quadrate der mittelsten gleich ist, so sind die drei geraden Linien proportional.

Es sei (Fig. 143.) A : C = B : C, so ist das Rechteck aus A und C dem Quadrate von B gleich. Und wenn das Rechteck von A und C dem Quadrate von B gleich ist, so ist auch A : B = B : C.

Beweis.

I. Man nehme die Linie D = der Linie B, so ist, weil

A ; B = B : C nunmehr auch

A : B = D : C und daher das Rechteck aus A und C dem Rechtecke aus B und D gleich (VI, 16. S.) Allein das Rechteck aus B und D ist dem Rechtecke aus B und B, das heißt, dem Quadrate von B gleich; folglich ist der Satz bewiesen.

II. Da das Rechteck aus A und C dem Quadrate von B und auch dem Rechtecke aus B und D gleich ist, so muß auch

A : B = D : C seyn. (VI, 16. S.) Allein es ist

B = D folglich auch

A : B = B : C.

Der 18. Satz.

Aufgabe.

Auf einer gegebenen geraden Linie eine geradlinige Figur zu beschreiben, welche einer andern gegebenen geradlinigen Figur ähnlich ist und eine ähnliche Lage mit ihr hat.

Man soll auf die gerade Linie (Fig. 144.) AB eine geradlinige Figur beschreiben, welche der gegebenen CFED ähnlich ist und eine ähnliche Lage mit ihr hat.

Auflösung und Beweis.

Man mache ∡ BAG = ∡ DCF (I, 23. S.) ferner ∡ ABG = ∡ CDF, dann ∡ BGH = ∡ DFE und endlich ∡ GBH = ∡ FDE, so ist auch

∡ AGB = ∡ CFD (I, 32. S.) und

∡ GHB = ∡ FED.

Da nun hierdurch die Seiten, welche gleiche Winkel bilden, proportional seyn müssen (VI, 4. S.) so ist

AGHB ∾ CFED (VI, 1. Erkl.)

Der 19. Satz.

Lehrsatz.

Aehnliche Dreiecke stehen in einem zweifach höhern Verhältnisse ihrer homologen Seiten.

Es sei (Fig. 145.) Δ ABC $\sim$ Δ DEF, so ist

$$\Delta \text{ ABC} : \Delta \text{ DEF} = (\text{BC} : \text{EF})^2.$$

Beweis.

Man nehme zu den Linien BC und EF die dritte Proportionallinie BG (VI, 11. S.) so daß BC : EF = EF : BG,

und folglich auch BC : BG = (BC : EF)²

ist und ziehe die gerade AG.

Da nun Δ ABC $\sim$ Δ DEF und $\measuredangle$ ABC = $\measuredangle$ DEF, so ist auch AB : BC = DE : EF (VI, 1. Erkl.) folglich

AB : DE = BC : EF. Nun war aber

BC : EF = EF : BG, daher ist

AB : DE = EF : BG, und daher auch

Δ ABG = Δ DEF. (VI, 15. S.) Es ist aber

BC : BG = Δ ABC : Δ ABG (VI, 1. S.) folglich

BC : BG = Δ ABC : Δ DEF. Allein es war

BC : BG = (BC : EF)², folglich ist

Δ ABC : Δ DEF = (BC : EF)².

Zusatz.

Da gezeigt wurde, daß

Δ ABC : Δ ABG = CB : BG oder

Δ ABC : Δ DEF = CB : BG, so folgt, daß, wenn drei gerade Linien proportional sind, die erste sich zur dritten verhält, wie das Dreieck über der ersten zu dem ihm ähnlichen und ähnlich liegenden Dreiecke über der zweiten.

Der 20. Satz.

Lehrsatz.

Aehnliche Vielecke lassen sich in gleichviele einander ähnliche, und den Ganzen homologe Dreiecke

theilen. Und ähnliche Vielecke stehen im zweifach höhern Verhältnisse ihrer homologen Seiten.

Es sei (Fig. 146.) DEABC ähnlich KLFGH, so können beide Vielecke in gleichviele einander ähnliche und den Ganzen homologe Dreiecke getheilt werden. Auch ist

$$DEABC : KLFGH = (AB : FG)^2.$$

Beweis.

I. Man ziehe die geraden Linien BE und EC, so wie auch GL und LH. Da nun DEABC $\sim$ KLFGH, so ist auch

$\measuredangle$ BAE $=$ $\measuredangle$ GFL (VI, 1. Erkl.) und daher

BA : AE $=$ GF : FL. Somit ist ferner

Δ BAE $\sim$ Δ FGL (VI, 4. S.) und daher

$\measuredangle$ ABE $=$ $\measuredangle$ FGL. Weil aber die beiden Vielecke einander ähnlich sind, so ist auch

$\measuredangle$ ABC $=$ $\measuredangle$ FGH, daher auch

$\measuredangle$ EBC $=$ $\measuredangle$ LGH. (I, 3. Gr.) Da nun

Δ ABE $\sim$ Δ FGL, so ist

EB : BA $=$ LG : GF und weil

DEABC $\sim$ KLFGH, so ist auch

AB : BC $=$ FG : GH, und daher

EB : BC $=$ LG : GH. Daher ist auch

Δ BCE $\sim$ Δ GHL (VI, 4. S.) Ebenso wird bewiesen, daß auch Δ CDE $\sim$ Δ HKL. Folglich sind die Vielecke in gleichviele unter sich ähnliche Dreiecke zerlegt.

II. Man ziehe die geraden Linien AC und FH, so ist, wegen der Aehnlichkeit beider Vielecke,

$\measuredangle$ ABC $=$ $\measuredangle$ FGH und daher

AB : BC $=$ FG : GH; folglich sind die Dreiecke ACB und FHG gleichwinkelig, oder es ist

$\measuredangle$ BAC $=$ $\measuredangle$ GFH und

$\measuredangle$ BCA $=$ $\measuredangle$ GHF. Daher ist in den Dreiecken AMB und FNG nunmehr $\measuredangle$ MAN $=$ $\measuredangle$ NFG. Es war aber

$\measuredangle$ ABM $=$ $\measuredangle$ FGN, folglich ist auch $\measuredangle$ AMB $=$ $\measuredangle$ FNG. (I, 32. S.)

Daher haben die Dreiecke AMB und FNG gleiche Winkel, und auf gleiche Art wird bewiesen, daß auch die Dreiecke CMB und HNG gleichwinkelig sind. Daher ist

AM : MB = FN : NG, und
BM : MC = GN : NH (VI, 4. S.) folglich
AM : MC = FN : NH. Es ist aber
AM : MC = △ BAM : △ BMC = △ EAM : △ EMC (VI, 1. S.) und daher AM : MC = △ ABE : △ BEC. Ebenso wird erwiesen, daß FN : NH = △ FGL : △ GLH; folglich ist
△ ABE : △ BEC = △ FGL : △ GLH, daher
△ ABE : △ FGL = △ BEC : △ GLH. Wenn man nun die Linien BD und GK zieht, so wird ebenso bewiesen, daß △ BEC : △ GLH = △ ECD : △ LHK, folglich ist
△ ABE : △ FGL = ABCDE : FGHKL. Demnach sind diese ähnliche Dreiecke, in welche die Vielecke zertheilt wurden, den Vielecken homolog, d. h. diese Dreiecke sind so proportional, daß die Dreiecke des Vielecks ABCDE die Vorderglieder, und die Dreiecke des Vielecks FGHKL die Hinterglieder in der Proportion sind.

Ein anderer Beweis.

Da zuvor (in I.) bewiesen worden ist, daß die Dreiecke des einen Vielecks den Dreiecken des andern ähnlich sind, so ist
△ ABE : △ FGL = (BE : GL)² = △ EBC : △ LGH (VI, 19. S.) Ebenso wird bewiesen, daß
△ EBC : △ LGH = (EC : LA)² = △ ECD : △ LHK.
Daher ist auch
△ ABE : △ FGL = △ EBC : △ LGH = △ ECD : △ LHK.
Somit sind die Dreiecke ABE, EBC und ECD die Vorderglieder und die Dreiecke FGL : LGH und LHK die Hinterglieder. Daher ist △ ABE : △ FGL = ABCDE : FGHKL.

III. Da so eben bewiesen worden ist, daß
△ ABE : △ FGL = ABCDE : FGHKL und
△ ABE : △ FGL = (AB : FG)² (VI, 19. S.) so ist auch ABCDE : FGHKL = (AB : FG)².

Erster Zusatz.

Auf gleiche Art kann man auch von ähnlichen Vierecken beweisen, daß sie in dem zweifach höheren Verhältnisse ihrer homologen Seiten stehen. Es ist aber auch ebendieses von den Dreiecken erwiesen (VI, 19. S.). Folglich sind überhaupt alle

ähnliche geradlinige Figuren in zweifach höherem Verhältnisse ihrer homologen Seiten.

Zweiter Zusatz.

Wenn man zu AB und FG die dritte Proportionallinie O sucht, so ist $AB : O = (AB : FG)^2$. Nun ist auch irgend eine geradlinige Figur auf AB zu einer ihr ähnlichen und ähnlich liegenden Figur auf FG im zweifach höheren Verhältnisse von AB : FG. Wenn daher drei gerade Linien AB, FG und O proportional sind, so verhält sich die erste oder AB so zur dritten oder O, wie sich irgend eine geradlinige Figur auf AB zu einer ihr ähnlichen und ähnlich liegenden Figur auf FG verhält.

Der 21. Satz.

Lehrsatz.

Wenn jede von zwei geradlinigen Figuren der nämlichen dritten ähnlich ist, so sind auch jene zwei Figuren unter sich ähnlich.

Es sei (Fig. 147.) sowohl die geradlinige Figur A, als auch die Figur B der dritten Figur C ähnlich, so ist auch $A \sim B$.

Beweis.

Da A und B einander ähnlich sind, so sind sie auch gleichwinkelig, und die Seiten welche gleiche Winkel einschließen, einander proportional. (VI, 1. Erkl.) Nun sind auch die Figuren B und C einander ähnlich, und daher ebenfalls gleichwinkelig und die, gleiche Winkel einschließenden Seiten einander proportional. Daher müssen auch die Figuren A und B gleichwinkelig seyn, (I, 1. Gr.) so wie auch die Seiten, welche gleiche Winkel einschließen, einander proportional seyn müssen. Folglich sind auch die Figuren A und B einander ähnlich (VI, 1. Erkl.)

Der 22. Satz.

Lehrsatz.

Wenn vier gerade Linien proportional sind, so müssen auch die auf denselben beschriebenen ähn-

lichen und ähnlich liegenden geradlinigen Figuren einander proportional seyn. Und wenn die auf vier geraden Linien beschriebenen ähnlichen und ähnlich liegenden Figuren einander proportional sind, so müssen auch diese vier geraden Linien einander proportional seyn.

Es sei (Fig. 148.) AB : CD = EF : GH und
△ KAB ∼ △ LCD, ferner
MVFE ∼ NWHG, so ist auch
△ KAB : △ LCD = MVFE : NWHG.

Wenn aber umgekehrt △ KAB ∼ △ LCD, ferner MVFE ∼ NWHG, und △ KAB : △ LCD = MVFE : NWHG, so muß auch AB : CD = EF : GH seyn.

Beweis.

I. Es sei AB : CD = EF : GH. Macht man nun
AB : CD = CD : O (VI, 11. S.) und
EF : GH = GH : P, so ist auch
CD : O = GH : P. Es war aber
AB : CD = EF : GH, daher ist
AB : O = EF : P. Allein
AB : O = △ KAB : △ LCD (VI, 20. S.)
Und EF : P = MVFE : NWHG, folglich ist auch
△ KAB : △ LCD = MVFE : NWHG.

II. Es sei ferner △ KAB : △ LCD = MVFE : NWHG. Nimmt man nun AB : CD = EF : QR (VI, 12. S.) beschreibet auf QR eine der MVFE und der NWHG ähnliche und ähnlich liegende Figur SZRQ, so ist nach dem ersten Theile des Beweises △ KAB : △ LCD = MVFE : SZRQ. Es ist aber △ KAB : △ LCD = MVFE : NWHG nach der Annahme, folglich muß auch
MF : SR = MF : NH und daher auch
SR = NH seyn. Weil aber nun
MVFE ∼ NWHG und auch
MVFE ∼ SZRQ, so ist auch
SRZQ ∼ NWHG (VI, 21. S.)
Daher ist (man sehe den nachfolgenden Lehnsatz)

QR = GH. Es war aber
AB : CD = EF : QR, folglich ist auch
AB : CD = EF : GH.

Lehnsatz.

Daß aber, wenn geradlinige Figuren einander gleich und ähnlich sind, ihre homologe Seiten einander gleich seyn müssen, kann auf folgende Art bewiesen werden.

Es seien die geradlinigen Figuren NWHG und SZRQ einander gleich und ähnlich, so müssen die homologen Seiten QR und GH einander gleich seyn.

Beweis.

Wenn diese Linien QR und GH ungleich wären, so sei die eine, etwa QR, die größere. Da nun SZRQ ∾ NWHG, so ist
QR : QS = GH : GN und folglich
QR : GH = QS : GN. Nun ist
QR > GH, folglich auch
QS > GN und daher auch
SZRQ > NWHG (VI, 20. S.) welches mit dem Erwiesenen, daß SZRQ = NWHG ist, im Widerspruche steht.

Anderer Beweis.

Da △ KAB : △ LCD = MVFE : NWHG, aber
△ KAB : △ LCD = (AB : CD)² (VI, 20. Zus.)
und MVFE : NWHG = (EF : GH)² so ist
(AB : CD)² = (EF : GH)² und folglich
AB : CD = EF : GH.

Der 23. Satz.

Lehrsatz.

Wenn Parallelogramme gleichwinkelig sind, so stehen sie in einem zusammengesetzten Verhältnisse ihrer Seiten.

Es seien die Parallelogramme (Fig. 149.) ABCD und CGFE gleichwinkelig, so stehen sie im zusammengesetzten Verhältnisse ihrer Seiten BC, CG und DC, CE.

Beweis.

Wenn man die Seiten BC und CG in eine gerade Linie BCG legt, so bilden, weil Winkel BCD = Winkel ECG (I, 14. S.) auch die Seiten DC und CE eine gerade Linie DCE. Man vollende nun das Parallelogramm DHGC und es sei K eine angenommene gerade Linie.

Macht man nun BC : CG = K : L (VI, 12. S.) und
DC : CE = L : M, so ist das Verhältniß
K : M aus den Verhältnissen
K : L und L : M oder aus den ihnen gleichen Verhältnissen
BC : CG und DC : CE zusammengesetzt (VI, 5. Erkl.) Weil nun BC : CG = ADCB : DHGC (VI, 1. S.) und
DC : CE = DHGC : CGFE, so ist auch
K : L = ADCB : DHGC und
L : M = DHGC : CGFE. Daher denn
K : M = ADCB : CGFE und es ist auch das Verhältniß von ADCB : CGFE aus den beiden Verhältnissen von BC : CG und von DC : CE zusammengesetzt.

Der 24. Satz.

Lehrsatz.

In jedem Parallelogramme sind die um die Diagonale herliegenden Parallelogramme sowohl dem Ganzen, als auch einander selbst ähnlich.

Es sei (Fig. 150.) ABCD das Parallelogramm, AC seine Diagonale, um welche die Parallelogramme AEFG und FHCK herliegen, so sind diese drei Parallelogramme einander ähnlich.

Beweis.

Da in dem Dreiecke ABC die EF parallel mit BC und in dem Dreiecke ADC die FG parallel mit CD ist, so hat man
BE : EA = CF : FA, und auch
DG : GA = CF : FA (VI, 2. S.) folglich auch
BE : EA = DG : GA und daher

BA : AE = DA : AG, also auch

BA : AD = EA : AG. Folglich sind in den Parallelogrammen ABCD und AEFG die Seiten um den gemeinschaftlichen Winkel BAD einander proportional.

Da nun GF mit DC parallel, so ist

$\measuredangle$ AGF = $\measuredangle$ ADC (I, 29. S.) und

$\measuredangle$ GFA = $\measuredangle$ DCA. Da nun

$\measuredangle$ DAC = $\measuredangle$ DAC, so sind die beiden Dreiecke ADC und AGF gleichwinkelig.

Auf eben diese Art wird bewiesen, daß die Dreiecke ABC und AEF gleichwinkelig sind. Daher müssen auch die Parallelogramme ABCD und AEFG gleichwinkelig seyn. Da nun

AD : DC = AG : GF (VI, 4. S.) und

CB : BA = FE : EA, ferner

DC : CA = GF : FA und

AC : CB = AF : FE, so ist

DC : CB = GF : FE. Es war aber nach dem Vorigen BA : AD = AE : AG, daher sind in den gleichwinkeligen Parallelogrammen ABCD und AEFG die Seiten, welche gleiche Winkel bilden, einander proportional; folglich diese Parallelogramme einander ähnlich. (VI, 1. Erkl.)

Auf eben diese Art wird bewiesen, daß auch

FHCK $\sim$ ABCD. Folglich muß auch

AEFG $\sim$ FHCK seyn. (VI, 21. S.)

Der 25. Satz.

Aufgabe.

Eine geradlinige Figur zu bilden, die einer gegebenen geradlinigen ähnlich und einer andern gegebenen gleich ist.

Es sei (Fig. 151.) ABC die gegebene Figur, welcher man eine andere ähnlich machen soll, und D sei jene Figur, welcher sie gleich seyn soll.

Auflösung.

Man beschreibe auf BC ein Parallelogramm BCEL, welches dem Dreiecke ABC gleich ist (I, 44. S.) und auf die Linie

CE unter dem Winkel CBL ein Parallelogramm CEMF, welches der Figur D gleich ist (I, 45. S.) so liegen BC und CF, so wie auch LE und EM in einer geraden Linie (I, 14. S.) Nun nehme man zu CB und CF die mittlere Proportionallinie GH (VI, 13. S.) und beschreibe über GH ein Dreieck GHK, welches dem Dreiecke CBA ähnlich ist und ähnlich liegt. (VI, 18. S.)

Beweis.

Da hier BC : GH = GH : CF, so ist auch

BC : CF = △ ABC : △ KGH (VI, 20. Zus.)

Nun ist aber BC : CF = CBLE : CFME (VI, 1. S.) daher auch △ ABC : △ KGH = CBLE : CFME, folglich

△ ABC : CBLE = △ KGH : CFME. Es ist aber

△ ABC = CBLE, folglich auch

△ KGH = CFME = D.

Der 26. Satz.

Lehrsatz.

Wenn von einem Parallelogramme ein ihm ähnliches und ähnlich liegendes unter einem gemeinschaftlichen Winkel abgeschnitten wird, so liegen beide um einerlei Diagonale.

Es werde (Fig. 152.) von dem Parallelogramme ADBC das ihm ähnliche und ähnlich liegende Parallelogramm AGFE unter dem nämlichen Winkel DAB abgeschnitten, so liegen beide um die nämliche Diagonale AFC.

Beweis.

Wenn diese beiden Parallelogramme nicht um die nämliche Diagonale lägen, so müßte die Diagonale des Parallelogramms ADCB nicht durch den Punct F gehen. Man nehme an, sie ginge durch einen andern Punct, etwa durch H und sei AHC. Man ziehe durch H die HK mit AD und BC gleichlaufend, so ist ADCB ∾ AGHK (VI, 24. S.) Folglich

DA : AB = GA : AK (VI, 1. Erkl.) Weil aber

ADCB ∾ AGFE, so hat man

DA : AB = GA : AE (VI, 1. Erkl.) Daher

müßte GA : AK = GA : AE, oder
GA : GA = AK : AE, folglich
AK = AE seyn, welches widersprechend ist (I, 9. Gr.)

Der 27. Satz.

Lehrsatz.

Ein Parallelogramm auf der Hälfte einer gegebenen geraden Linie ist größer, als jedes andere Parallelogramm auf einem beliebigen Abschnitte derselbigen Linie, dessen Ergänzung auf dem übrigen Abschnitte dem Parallelogramm auf der Hälfte ähnlich ist und ähnlich liegt.

Es sei (Fig. 153.) die gegebene gerade Linie AB in C halbirt, so ist der Abschnitt, auf welchem das andere Parallelogramm beschrieben werden soll, entweder größer oder kleiner, als die Hälfte AC.

Beweis.

I. Es sei AK der gegebene Abschnitt und AK > AC. Man beschreibe auf AC das Parallelogramm ACDV und dessen Ergänzung CBED; ebenso auf AK ein anderes Parallelogramm AKFG und dessen Ergänzung KBHF ∾ CBED ∾ ACDV, so ist zu beweisen, daß ACDV > AKFG. Da die Parallelogramme CBED und KBHF einander ähnlich sind, so liegen beide um einerlei Diagonale. (VI, 26. S.)

Man ziehe diese Diagonale DFB und vollende die Figur, so ist, weil CKFL = FHEQ (I, 43. S.) und
KBHF = KBHF, nun auch
CBHL = KBEQ. Es ist aber, weil
AC = CB, auch CBHL = ACLG (I, 36. S.)
daher ist ACLG = KBEQ, allein
CKFL = CKFL, daher
AKFG = Gnom. LMN; folglich muß CBED oder ACDV größer, als AKFG seyn.

II. Es sei (Fig. 154.) AD der gegebene Abschnitt und AD < AC. Man beschreibe auf AC das Parallelogramm ACLK, dessen Ergänzung CBML ist, und auf AD ein anderes Parallelogramm ADEH, dessen Ergänzung DBFE ∾ CBML ∾ ACLK ist, so ist zu beweisen, daß ACLK > ADEH.

Da die Parallelogramme DEFB und CLMB einander ähnlich sind, so liegen beide um einerlei Diagonale (VI, 26. S.) Wird nun diese Diagonale ELB gezogen und die Figur vollendet, so ist, weil FG = GH, nunmehr auch

LGFM = LGHK (I, 36. S.) und daher
LGFM > LGEV. Es ist aber
LGFM = LVDC (I, 43. S.), daher auch
LVDC > EHKV. Allein
KVDA = KVDA, folglich
AKLC > AHED.

Der 28. Satz.

Aufgabe.

Auf dem Abschnitte einer gegebenen geraden Linie ein Parallelogramm dergestalt zu beschreiben, daß es einer gegebenen geradlinigen Figur, welche nicht größer, als das Parallelogramm auf der halben Linie ist, gleich sei, und daß seine Ergänzung auf dem andern Abschnitte einem gegebenen, der Ergänzung des Parallelogramms auf der halben Linie ähnlichen Parallelogramme gleich sei.

Es sei (Fig. 155.) AB die gegebene gerade Linie und C die gegebene geradlinige Figur, welcher man eine andere auf der Linie AB gleich machen soll; auch sei C nicht größer, als das Parallelogramm auf der Hälfte der Linie. Ferner seien die Ergänzungen einander ähnlich und die Figur, welcher die Ergänzung ähnlich seyn soll, sei D, und man soll auf AB ein der Figur C gleiches Parallelogramm beschreiben, welches ein der Figur D ähnliches Parallelogramm zur Ergänzung hat.

Auflösung und Beweis.

Es sei die gegebene gerade Linie AB in E halbirt. Man beschreibe auf BE das Parallelogramm BEGF, welches dem gegebenen D ähnlich und ähnlich liegend ist, (VI, 18. S.) und vollende das Parallelogramm AEGH, so ist dieses Parallelogramm AEGH, welches nicht kleiner als C seyn darf, entweder ebenso groß, oder größer als C. Wäre das erste, so wäre auch die Aufgabe schon aufgelöset, da auf dem Abschnitte AE ein Parallelogramm AEGH beschrieben wäre, welches = C und dessen Ergänzung EGFB ∾ D ist.

Wäre aber AHGE > C, so ist, weil

AHGE = EGFB auch

EGFB > C. Nun beschreibe man ein Parallelogramm KLMN, welches dem Ueberschusse von EGFB über C gleich und dem gegebenen Parallelogramme D ähnlich und ähnlich liegend ist (VI, 25. S.) Dieses Parallelogramm ist daher auch dem Parallelogramme EGFB ähnlich; so, daß LK der GE und LM der GF homolog, und LK : LM = GE : GF ist.

Nun ist aber EGFB = C + KLMN und daher

EGFB > KLMN, folglich auch

GE > LK (VI, 20. Zus.) und

GF > LM. Nun mache man

GZ = LK und GO = LM, und vollende das Parallelogramm ZGOP, so ist

ZGOP ≷ KLMN. Es ist aber

KLMN ∾ EGFB, daher auch

ZGOP ∾ EGFB (VI, 21. S.) Folglich liegen beide um die nämliche Diagonale (VI, 26. S.) Man ziehe diese Diagonale GPB und vollende die Figur.

Da hier EGFB = C + KLMN und auch

ZGOP = KLMN, so ist

EGFP = C + ZGOP, und daher Gnom.

TVX = C. Da aber

OFQP = ZPRE (I, 34. S.) und

PQBR = PQBR, so ist auch

OFBR = EZQB = EZSA. Allein
ZPRE = ZPRE, folglich Gnom.
TVX = SPRA, und daher
SPRA = C. Demnach ist auf dem Abschnitte AR ein Parallelogramm ARPS beschrieben, welches = C und dessen Ergänzung RPQB ∾ ZGOP ∾ D ist. (VI, 24. S.)

Der 29. Satz.

Aufgabe.

Auf eine gegebene gerade Linie ein Parallelogramm so zu beschreiben, daß es nebst seiner, einem gegebenen Parallelogramme ähnlichen Ergänzung auf der in gleicher Richtung angesetzten Linie, einer gegebenen geradlinigen Figur gleich ist.

Es sei (Fig. 156.) die gegebene gerade Linie AB; die gegebene geradlinige Figur, welcher eine andere auf AB gleich werden soll, sei C; jene aber, welcher der Ueberschuß ähnlich seyn soll, sei D. Man soll auf AB ein der Figur C gleiches Parallelogramm bilden, welches ein, der Figur D ähnliches Parallelogramm zum Ueberschusse hat.

Auflösung.

Man halbire die AB in E, beschreibe auf EB ein Parallelogramm EFLB, welches dem gegebenen Parallelogramme D ähnlich ist (VI, 18. S.) und ein Parallelogramm GKHV welches = EFLB + C und ∾ D, folglich auch ∾ EFLB ist (VI, 25. S.) und es sei

KH : KG = FL : FE. Nun ist
GKHV > EFLB, daher auch
KH > FL und
KG > FE.

Man verlängere FL über L, mache FM = KH, und verlängere FE über E, und mache FN = KG, vollende auch das Parallelogramm NFMZ, so ist

NFMZ ≷ GKHV. Es ist aber

GKHV ∽ EFLS, daher auch
NFMZ ∽ EFLS und beide Parallelogramme müssen um einerlei Diagonale liegen. (VI, 26. S.) Man ziehe diese Diagonale FBZ und vollende die Figur.

Beweis.

Da GKHV = EFLB + C und
GKHV = NFMZ, so ist auch
NFMZ = EFLB + C und daher Gnom.
QRS = C.
Es ist aber, weil AE = EB, auch
AENW = EBPN = LMOB (I, 43. S.) Allein
NEOZ = NEOZ. Daher
AOZW = Gnom. QRS und folglich
AOZW = C.

Daher ist auf AB ein Parallelogramm ABPW beschrieben, welches nebst seiner, der Figur D ähnlichen Ergänzung PBOZ der gegebenen Figur C gleich ist.

Der 30. Satz.

Aufgabe.

Eine gegebene begränzte gerade Linie nach stetiger Proportion zu theilen.

Es sei (Fig. 157.) AB die gegebene gerade Linie, welche nach stetiger Proportion getheilt werden soll.

Auflösung.

Man bilde über AB das Quadrat ABGC (I, 46. S.) und beschreibe auf AC ein dem Quadrate ABGC gleiches Parallelogramm CHDF, welches die, der Figur ABGC ähnliche Figur AHDE zum Ueberschusse hat.

Beweis.

Da ABGC ein Quadrat ist, so muß auch AHDE ein Quadrat seyn. Da ferner
CHDF = CABG und
CAEF = CAEF, so muß auch
AHDE = FEBG seyn.

Aber AHDE und FEBG sind gleichwinkelig, folglich ist
FE : ED = AE : EB (VI, 14. S.) Es ist aber
FE = CA = AB (I, 34. S.) und
ED = AE, daher auch
BA : AE = AE : EB. Es ist aber
BA > AE, daher auch
AE > EB. Folglich ist die Linie AB in E nach stetiger Proportion getheilt. (VI, 3. Erkl.)

Andere Auflösung.

Man schneide die Linie AB so in dem Puncte E, daß das Rechteck aus AB und BE dem Quadrate von AE gleich ist (II, 11. S.) so muß auch BA : AE = AE : EB seyn (VI, 17. S.) und AB ist in E auf die verlangte Art getheilt. (VI, 3. Erkl.)

Der 31. Satz.

Lehrsatz.

In jedem rechtwinkeligen Dreiecke ist die Figur auf der, dem rechten Winkel gegenüber liegenden Seite so groß, als die beiden ihr ähnlichen und ähnlich liegenden Figuren auf den beiden andern Seiten zusammengenommen.

Es sei (Fig. 158.) BAC das rechtwinkelige Dreieck, worin ∢ BAC = R, so ist die über BC beschriebene Figur so groß, als die beiden über AB und AC beschriebenen ihr ähnlichen und ähnlich liegenden F und G zusammengenommen.

Beweis.

Wenn man aus dem Puncte A auf BC das Loth AD zieht, so ist △ ABC ∾ △ ADB (VI, 8. S.), daher
CB : BA = BA : BD, und folglich
CB : BD = E : F (VI, 20. Zus.)
Auf gleiche Art wird bewiesen, daß
CB : CD = E : G. Daher ist auch
CB : BD + CD = E : F + G. Es ist aber
CB = BD + CD, folglich auch
E = F + G.

Anderer Beweis.

Da die, über den drei Seiten des rechtwinkeligen Dreiecks beschriebenen Figuren einander ähnlich sind, so ist

$E : F = (BC : AB)^2$ (VI, 23. S.) Es ist aber

Qdr. BC : Qdr. AB = $(BC : AB)^2$ (VI, 20. Zus.) folglich

auch E : F = Quadr. BC : Quadr. AB.

Ebenso wird bewiesen, daß

E : G = Quadr. BC : Quadr. AC. Daher ist

E : F + G = Quadr. BC : Quadr. AB + Quadr. AC.

Es ist aber auch

Quadr. BC = Quadr. AB + Quadr. AC (I, 47. S.)

Daher E = E + G.

Der 32. Satz.

Lehrsatz.

Wenn zwei Dreiecke, worin zwei Seiten des einen zweien Seiten des andern proportional sind, so aneinander gebracht werden, daß ihre homologen Seiten parallel sind, so liegen ihre dritten Seiten in einer geraden Linie.

Es sei (Fig. 159.) in den Dreiecken BAC und CDE die BA : AC = CD : DE, und es sei AB mit DC; auch AC mit DE gleichlaufend, so liegen die Seiten BC und CE in einer geraden Linie BCE.

Beweis.

Da die Seite AB mit DC und die Seite AC mit DE gleichlaufend ist, so ist auch

$\measuredangle$ BAC = $\measuredangle$ ACD (I, 29. S.) und

$\measuredangle$ CDE = $\measuredangle$ ACD, daher auch

$\measuredangle$ BAC = $\measuredangle$ CDE. Da nun nach der Annahme BA : AC = CD : DE, so sind auch die Dreiecke ABC und DCE gleichwinkelig (VI, 6. S.) folglich ist

$\measuredangle$ ABC = $\measuredangle$ DCE. Es war aber auch

$\measuredangle$ BAC = $\measuredangle$ ACD. Daher ist

$\measuredangle$ ABC + $\measuredangle$ BAC = $\measuredangle$ ECA. Allein

$\measuredangle$ ACB = $\measuredangle$ ACB. Folglich

$\measuredangle$ ABC + $\measuredangle$ BAC + $\measuredangle$ ACB = $\measuredangle$ ACE + $\measuredangle$ ACB.
Aber $\measuredangle$ ABC + $\measuredangle$ BAC + $\measuredangle$ ACB = 2 R (I, 32. S.), folglich
auch $\measuredangle$ ACE + $\measuredangle$ ACB = 2 R, und daher BCE
eine gerade Linie (I, 14. S.)

Der 33. Satz.

Lehrsatz.

In gleichen Kreisen stehen sowohl die Centriwinkel, als auch die Peripheriewinkel und ebenso die Ausschnitte in dem Verhältnisse der Kreisbogen, worauf sie sich befinden.

Es seien (Fig. 160.) in den gleichen Kreisen ABC und DEF an den Mittelpuncten G und H die Winkel BGC und EHF; an den Umkreisen aber die Winkel BAC und EDF, so ist

$\measuredangle$ BGC : $\measuredangle$ EHF = Bog. BC : Bog. EF. Ferner

$\measuredangle$ BAC : $\measuredangle$ EDF = Bog. BC : Bog. EF, endlich Ausschnitt BGC : Ausschnitt EHF = Bog. BC : Bog. EF.

Beweis.

I. Man nehme in beliebiger Menge die Kreisbogen CK, KL dem Bogen BC und die Kreisbogen FM, MN dem Bogen EF gleich, ziehe GK und GL, ferner HM und HN, so sind die Centriwinkel, die auf gleichen Bogen stehen, einander gleich. (III, 27. S.) Folglich sind Bogen BL, Winkel BGL vom Bogen BC und Winkel BGC, und ebenso Bogen EN, Winkel EHN von Bogen EF und Winkel EHF die Gleichvielfachen, und es ist

wenn Bog. BL > Bog. EN, auch $\measuredangle$ BGL > $\measuredangle$ EHN und
wenn Bog. BL Bog. EN auch $\measuredangle$ BGL = $\measuredangle$ EHN und
wenn Bog. BL < Bog. EN, auch $\measuredangle$ BGL < $\measuredangle$ EHN (III, 27. S.)

Daher ist Bog. BC : Bog. EF = $\measuredangle$ BGC : $\measuredangle$ EHF.

Weil aber

$\measuredangle$ BGC = 2 $\measuredangle$ BAC (III, 20. S.) und auch
$\measuredangle$ EHF = 2 $\measuredangle$ EDF, so ist

$\measuredangle$ BGC : $\measuredangle$ EHF = $\measuredangle$ BAC : $\measuredangle$ EDF, folglich auch
Bog. BC : Bog. EF = $\measuredangle$ BAC : $\measuredangle$ EDF.

II. Man ziehe die geraden Linien BC und CK, nehme zwischen B und C den willkührlichen Punct O, zwischen C und K den willkührlichen Punct P und ziehe BO, OC, CP, und PK.

Da hier GB = GC = GK, auch

$\measuredangle$ BGC = $\measuredangle$ CGK, so ist auch

$\triangle$ CGB = $\triangle$ CGK (I, 4. S.) und folglich

BC = CK.

Da die Bogen BC und CK einander gleich sind, so sind auch ihre Reste vom ganzen Umfange gleich. Folglich stehen die Winkel BOC und CPK auf gleichen Bogen und sind daher einander gleich (III, 27. S.) Folglich sind auch die Segmente BOC und CPK einander ähnlich (III, 11. Erkl.) Allein ihre Grundlinien BC und CK sind einander gleich, folglich müssen auch die Segmente BOC und CPK einander gleich seyn. (III, 24. S.) Allein die Dreiecke CGB und CGK sind einander gleich, folglich sind es auch die Ausschnitte GBC und GCK.

Ebenso wird erwiesen, daß die Ausschnitte CGK und GKL einander gleich sind. Daher sind auch die drei Ausschnitte einander gleich. Daher sind Bog. BL und Ausschn. GBL von Bog. BC und Ausschn. GBC, und auf gleiche Weise Bog. EN und Ausschn. HEN von Bog. EF und Ausschn. HEF die Gleichvielfachen. Auch ist,

wenn Bog. BL > Bog. EN ist, auch Ausschn. GBL > Ausschnitt HEN

wenn Bog. BL = Bog. EN ist, auch Ausschn. GBL = Ausschnitt HEN

wenn Bog. BL < Bog. EN ist, auch Ausschn. GBL < Ausschnitt HEN, folglich ist

Bog. BC : Bog. EF = Ausschn. GBC = Ausschnitt HEF.

Zusatz.

Hieraus geht hervor, daß auch die Kreisausschnitte BGC und EHF sich wie die Winkel am Mittelpuncte BGC und EHF verhalten.

Ende des sechsten Buchs.

Das
eilfte Buch
der
Elemente des Euclides.

Dieses Buch handelt:

1) Als Vorbereitung zur Körperlehre (Stereometrie) von der Lage gerader Linien und ebener Flächen gegen Ebenen. Satz 1—19.

2) Von den Körperwinkeln. Satz 20—23.

3) Von den Parallelopipeden und dreieckigen Prismen. Satz 24—40.

Erklärungen zum eilften und zwölften Buche.

1. Ein Körper ist dasjenige, was eine Länge, Breite und Tiefe hat.

2. Die Grenze eines Körpers ist eine Fläche.

3. Eine gerade Linie steht auf einer Ebene lothrecht, wenn sie mit allen in derselben Ebene liegenden und sie berührenden geraden Linien rechte Winkel bildet.

4. Eine Ebene steht auf einer andern Ebene lothrecht, wenn alle gerade Linien, welche in der einen Ebene auf den gemeinschaftlichen Durchschnitt beider Ebenen senkrecht errichtet werden, auch auf der andern Ebene lothrecht stehen.

5. Die Neigung einer geraden Linie gegen eine Ebene ist der spitze Winkel, welchen sie mit einer andern geraden Linie bildet, die man durch zwei Puncte in der Ebene zieht, wovon der erste der Fußpunct jener ersten Linie, der andere aber jener Punct ist, in welchem ein irgendwo von ihr auf die Ebene gezogenes Loth eintrifft.

6. Die Neigung zweier Ebenen gegeneinander ist der spitze Winkel, der von zwei geraden Linien gebildet wird, welche in beiden Ebenen auf den gemeinschaftlichen Durchschnitt und aus dem nämlichen Puncte senkrecht errichtet werden.

7. Zwei Ebenen haben ähnliche Neigungen gegen einander, wenn die ebenbemerkten Neigungswinkel einander gleich sind.

8. Parallele Ebenen sind jene, welche bei jeder Verlängerung niemals zusammentreffen.

9. Aehnliche Körper heißen jene, die von gleichvielen ähnlichen Ebenen begränzt werden.

10. Gleiche und ähnliche Körper sind jene, die von gleichvielen, gleichen und ähnlichen Ebenen eingeschlossen werden.

11) Ein körperlicher Winkel (eine Ecke) ist die Neigung, von mehr als zwei geraden Linien gegen einander, die einander berühren, ohne in einerlei Ebene zu liegen; oder: ein körperlicher Winkel ist jener, der von wenigstens drei ebenen Winkeln begränzt wird, welche in einem Puncte zusammentreffen, ohne in einerlei Ebene zu liegen.

12. Eine Pyramide ist jener Körper, der von Ebenen begränzt ist, welche von einer einzigen Ebene ausgehen und in einem Puncte auſſer ihr zusammentreffen.

13. Ein Prisma ist ein Körper, der von Ebenen begränzt ist, unter welchen zwei einander gegenüberliegende sowohl gleich und ähnlich, als parallel; die übrigen aber Parallelogramme sind.

14. Eine Kugel ist jener Körper, welcher von einem Halbkreise beschrieben wird, wenn sich derselbe einmal ganz um seinen unbeweglichen Durchmesser herumbewegt.

15. Die Axe der Kugel ist die ebenbemerkte unbewegte Linie, um welche der Halbkreis gedreht wird.

16. Der Mittelpunct der Kugel ist eben jener Punct, welcher auch Mittelpunct des bemerkten Halbkreises ist.

17. Der Durchmesser der Kugel ist jene gerade Linie, welche durch den Mittelpunct geht, und an beiden Seiten von der Kugelfläche begränzt wird.

18. Ein Kegel ist jener Körper, welchen ein rechtwinkeliges Dreieck beschreibt, wenn dasselbe rings um eine den rechten Winkel bildende Seite gedreht wird. Dieses unverrückte Loth ist entweder ebenso groß, oder kleiner, oder größer, als das andere bewegte, und bildet hiedurch im ersten Falle einen rechtwinkeligen, im zweiten einen stumpfwinkeligen, und im dritten einen spitzwinkeligen Kegel.

19. Die Axe des Kegels ist die unbewegt bleibende Linie, um welche sich das Dreieck gedreht hat.

20. Die Grundfläche des Kegels ist jener Kreis, welcher von dem bewegten Lothe beschrieben wird.

21. Ein Cylinder ist jener Körper, welcher von einem rechtwinkeligen Parallelogramme beschrieben wird, wenn sich dasselbe rings um seine unbewegliche Seite dreht.

22. Die Axe des Cylinders ist jene unverrückte Seite, um welche sich das Parallelogramm gedreht hat.

23. Die Grundflächen des Cylinders sind jene Kreise, welche von den beiden entgegengesetzten bewegten Seiten des Parallelogramms beschrieben werden.

24. Kegel, so wie auch Cylinder, sind einander ähnlich, wenn ihre Axen und die Durchmesser ihrer Grundflächen einander proportional sind.

25. Ein Würfel (Cubus) ist jener Körper, der von sechs gleichen Quadraten eingeschlossen wird.

26. Ein Tetraëder ist ein Körper, der von vier gleichen und gleichseitigen Dreiecken begrenzt wird.

27. Ein Octaëder ist jener Körper, der von acht gleichen und gleichseitigen Dreiecken eingeschlossen wird.

28. Ein Dodecaëder ist ein Körper, der von zwölf gleichen, gleichseitigen und gleichwinkeligen Fünfecken begränzt wird.

29. Ein Icosaëder ist ein von zwanzig gleichen und gleichseitigen Dreiecken begrenzter Körper.

Der 1. Satz.

Lehrsatz.

Von einer geraden Linie kann nicht ein Theil in einer Ebene und ein anderer Theil ausserhalb dieser Ebene liegen.

Es sei (Fig. 161.) AB eine gerade Linie, so kann von ihr nicht zugleich ein Theil in der Ebene MN, und ein anderer Theil ausserhalb dieser Ebene liegen.

Beweis.

Wenn ABC eine gerade Linie wäre, von welcher der Theil AB in der Ebene MN und der Theil BC oberhalb dieser Ebene läge, so verlängere man den in der Ebene liegenden Theil AB nach D.. Hierdurch würden die zwei geraden Linien ABC und ABD sich einander in der geraden Linie AB durchschneiden, welches widersprechend ist, da zwei gerade Linien

nur in einem Puncte zusammentreffen können, wenn sie nicht ganz und gar auf einander fallen.

Der 2. Satz.

Lehrsatz.

Wenn sich zwei gerade Linie einander durchschneiden, so liegen sie in einer Ebene; auch liegt jedes Dreieck in einer Ebene.

Wenn die zwei geraden Linien (Fig. 162.) AB und CD sich einander schneiden, so liegen beide in einerlei Ebene, so wie auch jedes, aus drei geraden Linien gebildete Dreieck sich in einer Ebene befindet.

Beweis.

Man nehme auf EC den willkührlichen Punct F, auf EB den willkührlichen Punct G und ziehe die Verbindungslinien FG und CB. Wäre nun von dem Dreiecke ECB ein Stück, wie etwa EFG, in der Ebene, und ein anderes Stück, wie FGBC, über der Ebene, so würde auch von jeder der zwei geraden Linien EB und EC ein Theil in der Ebene, und ein anderer Theil über der Ebene liegen, was widersprechend ist. (XI, 1. S.) Folglich liegt das ganze Dreieck EBC in einerlei Ebene. In dieser Ebene befinden sich auch die Linien EB und EC; folglich auch die Linien AB und CD (XI, 1. S.)

Der 3. Satz.

Lehrsatz.

Wenn zwei Ebenen einander durchschneiden, so ist ihr gemeinschaftlicher Durchschnitt eine gerade Linie.

Es sei (Fig. 163.) der gemeinschaftliche Durchschnitt der sich schneidenden Ebenen AB und BC in BD, so ist BD eine gerade Linie.

Beweis.

Wenn BD keine gerade Linie wäre, so sei es irgend eine andere, etwa BED in der Ebene AB und BFD in der Ebene

BC. Hier würden nun die zwei geraden Linien BED und BFD einen Raum BEDF einschließen, was widersprechend ist. (I, 12. Gr.) Folglich kann auser BD keine andere gerade Linie von B nach D möglich seyn.

Der 4. Satz.

Lehrsatz.

Wenn eine gerade Linie auf zwei andern, die einander schneiden, in ihrem gemeinschaftlichen Durchschnitte senkrecht steht, so ist sie auch auf der Ebene, worin jene Linien liegen, lothrecht.

Wenn (Fig. 164.) die Linie FE sowohl mit AEB als mit DEC im Puncte E rechte Winkel bildet, so steht FE auf der Ebene, worin AB und CD liegen, senkrecht.

Beweis.

Man ziehe in der Ebene, worin AB und CD liegen, und durch ihren Durchschnittspunct E eine gerade Linie GEH, mache EA = EB, EC = ED, und ziehe AD und CB. Ferner nehme man in EF einen willkührlichen Punct F, und ziehe die Verbindungslinien FA, FG, FD, FB, FH und FC. Hier ist nun in den Dreiecken, AED und CEB die

AE = EB, ferner die
ED = EC, und endlich
$\measuredangle$ AED = $\measuredangle$ CEB (I, 15. S.) folglich ist auch
AD = BC (I, 4. S.) und
$\measuredangle$ DAE = $\measuredangle$ EBC. Es ist aber auch
$\measuredangle$ AEG = $\measuredangle$ BEH (I, 15. S.) auch
AE = EB, folglich muß auch
AG = BH und
GE = HE seyn. (I, 26. S.)

In den Dreiecken FEA und FEB ist FE lothrecht auf EA und auf EB, daher

$\measuredangle$ FEA = $\measuredangle$ FEB = R, ferner
AE = EB und
FE = FE, folglich
FA = FB (I, 4. S.) Aus gleichem Grunde ist

auch in den Dreiecken FED und FEC die Seite
FD = FC. Es war aber
AD = CB. Folglich ist
∢ FAD = ∢ FBC. (I, 8. S.) Allein
FA = FB und
AG = BH, daher ist auch
FG = FH (I, 4. S.) ferner
FE = FE und nach dem Vorigen
GE = HE, folglich auch
∢ FEG = ∢ FEH (I, 8. S.) und daher die
FE auf GEH lothrecht. (I, 10. Erkl.)

Auf gleiche Art wird bewiesen, daß FE auch mit jeder andern durch den Punct E in der Ebene der Durchschnittslinien AB und CD gezogenen einen rechten Winkel bildet. Daher muß FE auf dieser Ebene lothrecht seyn. (XI, 3. Erkl.)

Der 5. Satz.

Lehrsatz.

Wenn eine gerade Linie mit drei andern an ihrem Endpuncte, einzeln genommen, rechte Winkel bildet, so liegen diese drei gerade Linien in einer Ebene.

Wenn (Fig. 165.) auf der Linie AB die Linien BC, BD und BE senkrecht steht, so müssen BC, BD und BE in einer Ebene liegen.

Beweis.

Lägen die drei genannten Linien nicht in einer Ebene, so befinde sich BE und BD in einerlei Ebene und BC über derselben. Wird nun die durch AB und BC gehende Ebene gehörig verlängert, so schneidet sie die untere Ebene in irgend einer geraden Linie (XI, 3. S.) etwa in BF. Es befänden sich daher BE, BD und BF in der untern, und BA, BC und BF in der oberen Ebene. Es ist aber AB lothrecht auf BE und BD, folglich muß sie auch auf BF senkrecht (XI, 4. S.) und daher ABF ein rechter Winkel seyn. Allein ABC war, nach der An-

nahme, auch ein rechter Winkel; folglich wäre ∡ ABC = ∡ ABF, welches widersprechend ist. (I, 9. Gr.)

Der 6. Satz.

Lehrsatz.

Wenn zwei gerade Linien auf der nämlichen Ebene senkrecht stehen, so sind sie mit einander gleichlaufend.

Wenn (Fig. 166.) die Linie AB und die Linie CD auf der Ebene BDE senkrecht stehet, so ist AB mit CD parallel.

Beweis.

Wenn die Linie AB mit dem Puncte B und CD mit dem Puncte D in der Ebene eintrifft, so ziehe man die Verbindungslinie BD und auf BD aus D in dieser Ebene das Loth DE, nehme DE = AB, und ziehe die Verbindungslinien BE, AD und AE. Da die Linie CD auf der Ebene BDE lothrecht steht, so ist sie es auch auf DB und DE. Auf gleiche Art muß auch AB sowohl auf BD als auf BE senkrecht seyn. Daher ist in den Dreiecken ABD und DEB

∡ ABD = ∡ BDE = R, ferner
AB = DE und
BD = DB. Daher ist
AD = BE (I, 4. S.) Nun ist
AB = DE, und
AE = AE daher auch
∡ ABE = ∡ EDA (I, 8. S.) Es ist aber
∡ ABE = R, folglich auch
∡ EDA = R, und es muß

ED auf DA senkrecht seyn. Da aber die ED auch auf DB und DC lothrecht steht, so befinden sich DB, DA und DC in einerlei Ebene (XI, 5. S.) in welcher auch die Verbindungslinie AB liegt. (XI, 2. S.) Nun ist aber ∡ ABD = ∡ CDB = R; folglich muß die AB mit CD parallel seyn. (I, 28. S.)

Der 7. Satz.

Lehrsatz.

Wenn zwei gerade Linien mit einander parallel sind und auf jeder ein willkührlicher Punct genommen wird, so liegt die gerade Verbindungslinie dieser Puncte mit den Parallelen in einerlei Ebene.

Es sei (Fig. 167.) AB mit CD gleichlaufend, E ein willkührlicher Punct in jener, F ein solcher Punct in dieser, und EF die gerade Verbindungslinie von beiden, so liegt EF in der Ebene ABDC.

Beweis.

Wäre dies nicht, so falle diese Verbindungslinie über die Ebene der Parallelen, wie EGF. Legt man nun durch diese eine Ebene, von welcher die untere Ebene in einer geraden Linie EF geschnitten wird (XI, 3. S.), so würden die zwei geraden Linien EGF und EF einen Raum einschließen, was unmöglich ist. (I, 12. Gr.)

Der 8. Satz.

Lehrsatz.

Wenn zwei gerade Linien mit einander parallel sind und die eine auf einer Ebene senkrecht ist, so steht auch die andere auf dieser Ebene lothrecht.

Es sei (Fig. 168.) AB mit CD gleichlaufend und die AB stehe auf einer Ebene BDE lothrecht, so muß auch CD auf ebendieser senkrecht seyn.

Beweis.

Wenn die Parallelen AB und CD die Ebene in den Puncten B und D schneiden, so ziehe man die gerade Verbindungslinie BD, auf sie aus D in der untern Ebene das Loth DE, nehme DE = AB und ziehe EB, EA und AD, so ist BD mit AB und CD in einerlei Ebene (XI, 7. S.), worin sich auch AD befindet. (XI, 2. S.)

Da nun AB auf der untern Ebene lothrecht ist, so ist
∢ ABD = ∢ ABE = R, (XI, 3. Erkl.) da aber
AB mit CD parallel ist, so muß
∢ ABD + ∢ BDC = 2 R seyn (I, 29. S.) folglich ist auch
∢ BDC = R.
Da nun in den Dreiecken ABD und DEB
∢ ABD = ∢ BDE = R, ferner
AB = DE, und auch
BD = BD, so ist
AD = BE (I, 4. S.) Es ist aber
DE = AB und
AE = AE, daher auch
∢ ABE = ∢ EDA (I, 8. S.) Allein
∢ ABE = R, folglich auch
∢ EDA = R. Daher steht ED auf der Ebene durch DB und DA lothrecht (XI, 4. S.) und muß es daher auch auf der, in dieser Ebene liegenden Linie DC seyn (XI, 3. Erkl.) Daher ist
∢ EDC = R. Es war aber auch
∢ BDC = R, daher steht CD auf der Ebene durch BD und DE lothrecht (XI, 4. S.) auf welcher auch die ihr gleichlaufende AB senkrecht ist.

Der 9. Satz.

Lehrsatz.

Wenn jede von zwei gerade Linien mit einer dritten, in einer andern Ebene liegenden, einzeln genommen, parallel ist, so sind auch jene zwei Linien unter sich parallel.

Es sei (Fig. 169.) sowohl AB als CD mit EF, welche in einer andern Ebene liegt, gleichlaufend, so muß auch AB mit CD gleichlaufend seyn.

Beweis.

Man nehme in EF den willkührlichen Punct G, errichte aus ihm auf EF in der Ebene durch FE und BA das Loth GH,

und aus dem nämlichen Puncte G auf EF in der Ebene EFDC das Loth GJ, so stehet diese EF auf der Ebene durch GH und GJ lothrecht (XI, 4. S.) Da aber sowohl AB als CD mit diesem Lothe EF parallel ist, so steht auch AB und CD auf der Ebene durch GH und GJ senkrecht, und daher muß auch AB mit CD parallel seyn (XI, 6. S.)

Der 10. Satz.

Lehrsatz.

Wenn zwei gerade Linien, welche einen Winkel bilden, zweien andern, ebenfalls einen Winkel bildenden, aber nicht in der nämlichen Ebene liegenden, einzeln genommen, parallel sind, so sind die beiden Winkel einander gleich.

Wenn (Fig. 170.) BA mit ED, BC mit EF gleichlaufend ist, und der Winkel ABC ausserhalb der Ebene des Winkels DEF sich befindet, so ist $\measuredangle$ ABC $=$ $\measuredangle$ DEF.

Beweis.

Man nehme BA $=$ ED, BC $=$ EF, und ziehe die Verbindungslinien AD, BE, CF, AC und DF. Da hier die BA der ED gleich und parallel ist, so muß auch AD der BE gleich und parallel seyn. (I, 33. S.) Auf gleiche Weise ist auch CF eben dieser BE gleich und parallel. Daher sind auch die Linien AD und CF einander gleich und parallel (XI, 9. S) und daher auch AC $=$ DF. Daher haben die beiden Dreiecke ABC und DEF drei Seiten, einzeln genommen, mit einander gemein, und es ist $\measuredangle$ ABC $=$ $\measuredangle$ DEF (I, 8. S.)

Der 11. Satz.

Aufgabe.

Von einem ausserhalb einer gegebenen Ebene befindlichen Puncte ein Loth auf sie zu errichten.

Es sei (Fig. 171.) A der ausserhalb einer Ebene gegebene Punct, aus welchem auf diese Ebene ein Loth zu ziehen ist.

Auflösung.

Man nehme in der gegebenen Ebene eine willkührliche gerade Linie BC, ziehe aus A auf sie das Loth AD (I, 12. S.) welches auf der gegebenen Ebene entweder senkrecht steht oder nicht. Wäre jenes, so ist die Aufgabe aufgelöset. Im letzten Falle aber errichte man aus D auf BC in der Ebene, worin sie liegt, ein willkührliches Loth DE, (I, 11. S.) und ziehe von A auf diese DE wiederum das Loth AF. (I, 12. S.)

Beweis.

Zieht man durch den Punct F die GH mit BC gleichlaufend, so ist, da BC auf DA und DE senkrecht steht, diese BC auf der Ebene ADE (XI, 4. S.) und folglich auch die mit ihr parallele GH auf dieser Ebene lothrecht. (XI, 8. S.) Daher ist GH auf FA oder, was einerlei ist, AF auf GH senkrecht (XI, 3. Erkl.) Es ist aber auch AF auf DE senkrecht, folglich muß diese AF auf der Ebene durch GH und DE, das heißt, auf der gegebenen Ebene lothrecht seyn. (XI, 4. S.)

Der 12. Satz.

Aufgabe.

Aus einem in einer Ebene gegebenen Puncte ein Loth auf sie zu errichten.

Es sei (Fig. 172.) A der in der Ebene MN gegebene Punct, aus welchem auf sie das Loth zu errichten ist.

Auflösung.

Man nehme einen Punct B ausserhalb der Ebene, und ziehe von diesem auf diese Ebene das Loth BC (XI, 11. S.) und sodann durch A mit CB die AD gleichlaufend. (I, 31. S.)

Beweis.

Da die beiden Linien DA und BC mit einander parallel sind, und BC auf der Ebene MN lothrecht steht, so muß auch DA auf dieser Ebene lothrecht seyn. (XI, 8. S.)

Der 13. Satz.

Lehrsatz.

Aus einem, in einer Ebene gegebenen Puncte können nicht zwei Lothe nach einerlei Seite hin auf diese Ebene errichtet werden.

Wenn A (Fig. 173.) der in der Ebene DE gegebene Punct ist, so können durch ihn nicht zwei Lothe nach einerlei Seite dieser Ebene errichtet werden.

Beweis.

Wenn AB und AC zwei Lothe auf der Ebene DE wären, so lege man durch BAC eine Ebene, welche die Ebene DE in der geraden Linie DAE schneidet. (XI, 3. S.) Hier wäre nun

$\measuredangle$ DAB = R und ebenso

$\measuredangle$ DAC = R (XI, 3. Erkl.) folglich auch

$\measuredangle$ DAB = $\measuredangle$ DAC, welches widersprechend ist (I, 9. Gr.)

Der 14. Satz.

Lehrsatz.

Wenn eine gerade Linie auf zwei Ebenen lothrecht steht, so sind diese Ebenen mit einander gleichlaufend.

Es sei (Fig. 174.) die Linie AB sowohl auf der Ebene CD, als auf der Ebene EF senkrecht, so muß CD mit EF gleichlaufend seyn.

Beweis.

Wären beide Ebenen nicht mit einander parallel, so müßten sie, hinlänglich verlängert, einmal zusammentreffen, und sich in einer geraden Linie GH durchschneiden. (XI, 3. S.) In dieser nehme man den willkührlichen Punct K und ziehe in der verlängerten Ebene DC die gerade Linie KA, und in der verlängerten Ebene EF die gerade Linie KB. Da nun die Linie AB auf beiden Ebenen lothrecht steht, so muß sie es auch auf KA und auf KB seyn. (XI, 3. Erkl.) Es befände sich daher

im Dreiecke AKB bei A und B ein rechter Winkel, welches widersprechend ist. (I, 17. S.)

Der 15. Satz

Lehrsatz.

Wenn zwei in einer Ebene zusammentreffende gerade Linien zweien in einer anderen Ebene liegenden, ebenfalls zusammentreffenden geraden Linien, einzeln genommen, parallel sind, so sind auch die beiden Ebenen mit einander gleichlaufend.

Es seien (Fig. 175.) AB und BC die in der einen, DE und EF die in der anderen Ebene liegenden Linien. Auch sei BA mit ED und BC mit EF gleichlaufend, so muß die Ebene durch ABC mit der Ebene durch DEF parallel seyn.

Beweis.

Es sei durch AB und BC die Ebene AC und durch DE und EF die Ebene DF gelegt. Aus B ziehe man auf die Ebene DF das Loth BG (XI, 11. S.) und ziehe in dieser Ebene durch G die GH mit ED und die GJ mit EF gleichlaufend (I, 31. S.) Da nun BA und GH, welche, einzeln genommen, mit ED parallel sind, auch unter sich parallel seyn müssen (XI, 9. S.) so befindet sich BG mit ihnen in einerlei Ebene (XI, 7. S.) Nun ist aber $\measuredangle$ BGH = R (XI, 3. Erkl.), daher auch

$\measuredangle$ GBA = R (I, 29. S.)

Ebenso wird erwiesen, daß auch $\measuredangle$ GBC = R; folglich muß GB auf der Ebene AC lothrecht seyn (XI, 4. S.) Es war aber GB auch auf der Ebene DF senkrecht, folglich sind die beiden Ebenen AC und DF mit einander parallel. (XI, 14. S.)

Der 16. Satz.

Lehrsatz.

Wenn zwei parallele Ebenen von einer dritten Ebene geschnitten werden, so sind die Durchschnittslinien ebenfalls parallel.

Es sei (Fig. 176.) die Ebene AB mit der Ebene CD parallel und beide werden von der dritten Ebene FHGE geschnitten, so sind die Durchschnittslinien FE und HG ebenfalls parallel.

Beweis.

Wenn diese Linien EF und GH nicht mit einander parallel wären, so müßten sie, über F und H verlängert, irgendwo zusammentreffen. Gesetzt dieß geschehe in J, so befände sich die gerade Linie EFJ in der Ebene AB (XI, 1. S.) und die gerade Linie GHJ in der Ebene CD und der Durchschnittspunct J läge sowohl in der Ebene AB, als auch in der Ebene CD. Daher träfen auch diese parallelen Ebenen AB und CD einmal zusammen, welches unmöglich ist. (XI, 8. Erkl.)

Der 17. Satz.

Lehrsatz.

Wenn zwei gerade Linien von drei parallelen Ebenen geschnitten werden, so bilden die Theile dieser Linien eine Proportion.

Es werden (Fig. 177.) die geraden Linien AB und CD von den parallelen Ebenen GH, JK und LM geschnitten, so bilden die Theile derselben gleiche Verhältnisse.

Beweis.

Man ziehe die Verbindungslinien AC, BD und AD, welche letztere die Ebene JK im Puncte N schneidet. Ferner ziehe man die Linien EN und FN.

Da die Ebenen JK und LM mit einander parallel sind, und von der Ebene EBDN geschnitten werden, so sind auch die Durchschnittslinien EN und BD parallel (XI, 16. S.) Aus gleichem Grunde ist aber auch die Linie NF mit AC gleichlaufend. Daher hat man im Dreiecke ABD

$$AE : EB = AN : ND \text{ (VI, 2. S.)}$$

und im Dreiecke ADC

$$CF : FD = AN : ND.$$ Folglich ist auch

$$AE : EB = CF : FD.$$

Der 18. Satz.

Lehrsatz.

Wenn eine gerade Linie auf einer Ebene senkrecht ist, so sind alle Ebenen, welche man durch diese gerade Linien legt, auf dieser Ebene senkrecht.

Es sei die Linie AB (Fig. 178.) auf der Ebene CE lothrecht, so wird auch jede andere, durch AB gehende Ebene auf ihr senkrecht seyn.

Beweis.

Man lege durch die lothrechte Linie AB eine willkührliche Ebene DE, welche die untere Ebene in der geraden Linie CE schneidet (XI, 3. S.) Errichtet man nun auf CE in dieser Ebene DE aus irgend einem willkührlichen Puncte F die FG lothrecht, so ist der Winkel GFB ein Rechter. Da aber AB auf der untern Ebene lothrecht steht, so ist auch der Winkel ABF ein Rechter (XI, 3. Erkl.) Daher müssen die Linien AB und GF mit einander gleichlaufend seyn. (I, 28. S.) Daher muß ferner auch GF auf der untern Ebene senkrecht seyn (XI, 8. S.) und folglich auch die Ebene DE. (XI, 4. Erkl.)

Der 19. Satz.

Lehrsatz.

Wenn jede von zwei, sich schneidenden Ebenen auf einer dritten Ebene senkrecht steht, so ist auch ihre Durchschnittslinie auf dieser Ebene lothrecht.

Wenn die zwei sich in BD (Fig. 179.) schneidenden Ebenen AB und BC auf der untern Ebene VW lothrecht sind, so muß auch BD auf ihr senkrecht seyn.

Beweis.

Wäre die Durchschnittslinie BD nicht auf der untern Ebene lothrecht, und folglich auch nicht auf den Durchschnittslinien DA und DC, so errichte man in D auf AD in der Ebene AB das Loth DE und auf CD aus D in der Ebene BC das Loth DF. Da nun die Ebenen AB und BC auf der

untern Ebene senkrecht sind, so wären auch die Linien DE und DF auf dieser Ebene lothrecht (XI, 4. Erkl.) welches widersprechend ist. (XI, 13. S.)

Der 20. Satz.

Lehrsatz.

Wenn ein körperlicher Winkel von drei ebenen Winkeln begrenzt ist, so sind jede zwei dieser Winkel zusammengenommen größer, als der dritte.

Es sei der körperliche Winkel bei A (Fig. 180.) von den drei ebenen Winkeln BAC, CAD und DAB begränzt, so ist

$$\measuredangle BAC + \measuredangle CAD > \measuredangle DAB$$
$$\measuredangle CAD + \measuredangle DAB > \measuredangle BAC \text{ und}$$
$$\measuredangle DAB + \measuredangle BAC > \measuredangle CAD.$$

Beweis.

Wenn jeder dieser drei ebenen Winkel dem andern gleich ist, so bedarf der Satz keines Beweises. Sind sie aber ungleich, so sei der Winkel BAC größer, und es ist zu beweisen, daß $\measuredangle BAD + \measuredangle DAC > \measuredangle BAC$. Man mache $\measuredangle BAE = \measuredangle BAD$ (I, 23. S.) ferner $AE = AD$ und ziehe die Verbindungslinien BEC, CD und BD, so ist in den Dreiecken DAB und BAE $DB = BE$ (I, 4. S.) Es ist aber in dem Dreiecke DBC (nach I, 20. S.)

$BD + DC > BC$, daher ist auch
$DC > EC$ (I, 5. Gr.); folglich
$\measuredangle DAC > \measuredangle CAE$ (I, 25. S.) und daher
$\measuredangle BAD + \measuredangle DAC > \measuredangle BAC$.

Der 21. Satz.

Lehrsatz.

Jeder körperliche Winkel wird von ebenen Winkeln begrenzt, welche zusammengenommen weniger, als vier Rechte betragen.

Es sei (Fig. 181.) der körperliche Winkel bei A von den ebenen Winkeln BAC, CAD und DAB eingeschlossen, so ist

$$\measuredangle BAC + \measuredangle CAD + \measuredangle DAB < 4\ R.$$

Beweis.

Man nehme auf den Linien AB, AC und AD die willkührlichen Puncte B, C und D und ziehe die Verbindungslinien BC, CD und DB, so ist bei dem körperlichen Winkel B, welcher von den drei ebenen Winkeln CBA, ABD und DBC eingeschlossen wird,

$$\measuredangle CBA + \measuredangle ABD > \measuredangle DBC \text{ (XI, 20. S.)}$$

Aus gleichem Grunde ist bei dem körperlichen Winkel D

$$\measuredangle BDA + \measuredangle ADC > \measuredangle BDC$$ und bei dem körperlichen Winkel C

$$\measuredangle DCA + \measuredangle ACB > \measuredangle BCD.$$

Es ist aber in dem Dreiecke DBC

$$\measuredangle DBC + \measuredangle BDC + \measuredangle BCD = 2\ R \text{ (I, 32. S.)}$$

folglich ist auch

$$\measuredangle CBA + \measuredangle ABD + \measuredangle BDA + \measuredangle ADC + \measuredangle DCA + \measuredangle ACB < 2R.$$

Es sind aber diese sechs Winkel, nebst den drei Winkeln BAC, CAD und DAB, zusammen so groß, als sechs rechte Winkel, folglich ist

$$\measuredangle BAC + \measuredangle CAD + \measuredangle DAB < 4\ R.$$

Der 22. Satz.

Lehrsatz.

Wenn drei ebene Winkel, wovon jede zwei zusammen größer als der dritte sind, gleiche Schenkel haben und die Endpuncte dieser Schenkel durch gerade Linien verbunden werden, so kann aus diesen geraden Linien ein Dreieck gebildet werden.

Es seien (Fig. 182.) die drei ebenen Winkel ABC, DEF und GHJ gegeben, wovon jede zwei zusammen größer, als der dritte ist und $BA = BC = HG = HJ = ED = EF$, so kann man aus den Verbindungslinien AC, GJ und DF ein Dreieck bilden.

Beweis.

Dieses Dreieck wird man bilden können, wenn von den drei geraden Linien je zwei zusammen genommen größer, als die dritte sind (I, 22. S.) Wäre nun ∠ ABC = ∠ DEF = ∠ GHJ, so müßte auch AC = DF = GJ seyn. (I, 4. S.) und es wären offenbar je zwei dieser Linien zusammengenommen größer, als die dritte.

Sind aber diese Winkel einander ungleich, so nehme man nach Willkühr zwei derselben, etwa ∠ ABC und ∠ GHJ, mache ∠ JHK = ∠ ABC (I, 23. S.) auch HK = HG und ziehe GK und JK, so ist in den Dreiecken ABC und JHK die AC = JK (I, 4. S.) Nun ist aber, weil

∠ GHJ + ∠ ABC > ∠ DEF (I, 24. S.) oder
∠ GHK > ∠ DEF, auch
GK > DF, aber
GJ + JK > GK, folglich auch
GJ + JK > DF (I, 20. S.) allein
JK = AC, daher auch
GJ + AC > DF.

Auf gleiche Art wird bewiesen, daß AC + DF > GJ und GJ + DF > AC. Folglich sind von den drei geraden Linien AC, DF und GJ je zwei zusammen größer, als die dritte.

Der 23. Satz.

Aufgabe.

Aus drei ebenen Winkeln, welche zusammen kleiner als vier Rechte, und wovon je zwei zusammen größer, als der dritte sind, einen körperlichen Winkel zu bilden.

Es seien (Fig. 184.) ABC, DEF und GHJ die drei ebenen Winkel, welche die angegebene Eigenschaft haben, so soll aus ihnen ein körperlicher Winkel gebildet werden.

Lehnsatz.

Wenn zwei gerade Linien (Fig. 183.) AB und KN gegeben sind, und es ist AB > KN, so soll eine dritte NQ

gefunden werden, daß Quadr. AB = Quadr. KN + Quadr. NQ sei. Man beschreibe über AB einen Halbkreis, trage aus A die AC = NK in denselben und ziehe CB.

Da hier ∢ ACB = R (III, 31. S.) so ist auch

Quadr. AB = Quadr. AC + Quadr. CB (I, 45. S.)

Nimmt man nun NQ = CB, so ist

Quadr. AB = Quadr. KN + Quadr. NQ.

Auflösung.

Man mache die Schenkel der drei gegebenen Winkel (Fig. 184.) ABC, DEF und GHJ einander gleich, und ziehe die Verbindungslinien AC, DF, GJ, aus welchen ein Dreieck gebildet werden kann (XI, 22. S.) Man beschreibe mit ihnen das Dreieck KLM, worin AC = KL, DF = LM, und GJ = MK ist, beschreibe ferner um dieses Dreieck KLM einen Kreis, (IV, 5. S.) so ist sein Mittelpunct N entweder innerhalb dieses Dreiecks, oder auf einer seiner Seiten, oder ausserhalb des Dreiecks.

I. Es sei des Kreises Mittelpunct N in der Seite LM des Dreiecks LKM. Man ziehe KN, so ist AB > KN. Man errichte aus dem Puncte N auf die Ebene des Kreises die gerade Linie NQ lethrecht (XI, 12. S.), mache NQ so groß, daß Quadr. AB = Quadr. KN + Quadr. NQ (Lehns.) und ziehe die Linien QK, QL und QM, so ist bei Q der zu bildende körperliche Winkel.

Hier ist zu beweisen,

Erstens, daß AB > KN oder daß

AB nicht = KN und

AB nicht < KN seyn könne. Wäre

AB = KN, so wäre auch, weil

AB = BC, und KN = LN = NM, auch

AB + BC = LM, folglich, weil

AB = BC = DE = EF, und

LM = DF, nunmehr auch

DE + EF = DF, was nicht seyn kann. (I, 20. S.)

Wäre aber AB < KN, so müßte aus gleichem Grunde DE + EF < DF seyn, welches ebenfalls nicht möglich ist.

Zweitens, daß bei Q der verlangte körperliche Winkel sei, oder daß die drei ebenen Winkel KQL, LQM und MQK, welche den körperlichen Winkel Q begrenzen, den gegebenen Winkeln ABC, DEF und GHJ einzeln genommen, gleich seien.

Da QN lothrecht auf dem Kreise steht, und folglich auch auf den Linien NL, NK und NM, (XI, 3. Erkl.) so ist in den Dreiecken QNL und QNK, die Seite QL = QK (I, 4. S.) und in den Dreiecken QNL und QNM die QL = QM (I, 4. S.) Daher ist auch QM = QK und daher

QK = QL = QM. Weil

aber ∢ QNK = R, so ist

(I, 47. S.) Quadr. QK = □. KN + □. NQ.

Es war aber Quadr. AB = □. KN + □. NQ;

daher ist Quadr. AB = □. QK, und somit

AB = QK. Daher sind die Schenkel der gegebenen Winkel, und die drei Linien welche den körperlichen Winkel Q einschließen, unter sich gleich.

Es ist aber auch

AC = KL, DF = LM, und GJ = MK; daher auch

∢ ABC = ∢ KQL, ∢ DEF = ∢ LQM, und

∢ GHJ = ∢ MQK. (I, 8. S.)

II. Es sei (Fig. 185.) der Mittelpunct des Kreises N innerhalb des Dreiecks KLM. Man ziehe KN, LN und MN, und verfahre im übrigen, wie bei dem ersten Falle, so wird auf die nämliche Art bewiesen, daß Q der verlangte körperliche Winkel ist, und es bleibt nur noch zu zeigen, daß AB > KN, oder daß AB nicht = KN, oder AB < KN seyn könne.

Wäre AB = KN, so wäre auch

BC = NL; es ist aber

AC = KL, folglich wäre

∢ ABC = ∢ KNL (I, 8. S.) Ebenso wird bewiesen, daß ∢ DEF = ∢ LNM, und ∢ GHJ = ∢ MNK wäre.

Daher wären die drei gegebenen Winkel, welche zusammen kleiner, als vier Rechte seyn müssen, so groß, als die drei Winkel bei N, welche zusammen vier Rechte betragen.

Wäre AB < KN, so nehme man
NO = AB, NP = BC, und ziehe OP, so ist, weil AB = BC, auch NO = NP. Aber NK = NL, daher OK = PL und LK mit OP gleichlaufend (VI, 2. S.), woraus NK : NO = KL : OP folgt (VI, 4. S.) Es ist aber NK > NO, daher auch KL, das ist
AC > OP. Es ist daher in den Dreiecken ABC und ONP, welche gleiche Schenkel haben, worin aber AC > OP, auch ∢ ABC > ∢ ONP (I, 24. S.)

Ebenso wird bewiesen, daß ∢ DEF > ∢ LNM und ∢ GHJ > ∢ MNK, und es wären die drei gegebenen Winkel, welche zusammen kleiner, als vier Rechte seyn müssen, größer, als die drei Winkel bei N, welche zusammen vier Rechte betragen.

III. Es liege des Kreises Mittelpunct N (Fig. 186.) ausserhalb des Dreiecks KLM. Man ziehe KN, LN und MN, und verfahre im Uebrigen, wie im ersten Falle, so wird wie dort bewiesen, daß sich bei Q der verlangte körperliche Winkel befindet, und es bleibt noch zu zeigen, daß auch hier AB > KN, oder daß AB nicht = KN, noch AB < KN sei.

Wäre AB = KN, so wäre auch BC = LN.

Allein AC = KL; folglich wäre ∢ ABC = ∢ LNK (I, 8. S.) Ebenso wird bewiesen, daß
∢ GHJ = ∢ KNM und ∢ DEF = ∢ LNM. Daher wäre ∢ ABC + ∢ GHJ = ∢ LNK + ∢ KNM = ∢ LNM = ∢ DEF, da doch von den gegebenen Winkeln je zwei zusammen größer, als der dritte seyn müssen.

Wäre AB < KN, so mache man AB = NO = NP = NR und ziehe PO und OR. Hier sind, wie im zweiten Falle, PO und LK, so wie auch OR und KM gleichlaufend, folglich ∢ POR = ∢ LKM (I, 29. S.) auch ist, wie im zweiten Falle, ∢ ABC > ∢ ONP und ∢ GHJ > ∢ ONR.
Man nehme daher ∢ ONS = ∢ ABC und
∢ ONT = ∢ GHJ, folglich
∢ SNT = ∢ ABC + ∢ GHJ, und mache
AB = NS = NT und ziehe TO, OS und ST.

Hier ist OS = AC = KL (I, 4. S.) und OT = GJ = KM. Es ist aber ∢ POR oder ∢ LKM > ∢ SOT, daher auch LM oder DF > ST. (I, 25. S.)

Nun ist NS = NT = AB, und daher auch

NS = DE = EF, folglich ist

∢ DEF > ∢ SNT (I, 25. S.) oder

∢ DEF > ∢ ABC + ∢ GHJ, welches gegen die Annahme ∢ ABC + ∢ GHJ > ∢ DEF streitet.

Der 24. Satz.

Lehrsatz.

Wenn ein Körper von parallelen Ebenen eingeschlossen ist, so sind seine gegenüberliegenden Seitenflächen gleiche Parallelogramme.

Es werde (Fig. 187.) der Körper ABHGDCFE (wofür in der Folge der Kürze wegen Körper BE, oder Körper DH wird gesetzt werden) von parallelen Ebenen eingeschlossen, so sind die einander gegenüberstehenden Seitenflächen gleiche Parallelogramme.

Beweis.

I. Die Ebene ABCD (wofür in der Folge kürzer Ebene AC gesetzt wird) schneidet die parallelen Ebenen BG und CE, so wie auch die parallelen Ebenen BF und AE. Daher sind im ersten Falle die Durchschnittslinien AB und DC, im zweiten Falle aber die Durchschnittslinien AD und BC mit einander parallel. Daher muß die Seitenfläche AC ein Parallelogramm seyn. Auf ähnliche Art wird dieses von allen übrigen Seitenflächen bewiesen.

II. Wenn man in zwei einander gegenüberliegenden Ebenen BG und CE die homologen Diagonalen AH und DF zieht,

so ist BG = 2 △ ABH (I, 34. S.) und ebenso

CE = 2 △ DCF. Nun sind aber die Linien AB und DC, sowie auch BH und CF einander gleich und parallel (I, 34. S.) und daher auch

$\measuredangle$ ABH $=$ $\measuredangle$ DCF (XI, 10. S.) folglich ist
$\triangle$ ABH $\cong$ $\triangle$ DCF (I, 4. S.) Daher
BG $=$ CE (I, 6. Gr.) Eben dieses gilt auf gleiche Art von allen übrigen sich entgegenliegenden Seitenflächen.

Ein Körper, wie der so eben betrachtete, heiße ein Parallelopipedum.

Der 25. Satz.

Lehrsatz.

Wenn ein Parallelopipedum durch eine Ebene geschnitten wird, welche zweien seiner gegenüberliegenden Seitenflächen parallel ist, so verhalten sich die beiden hiedurch entstehenden Körper, wie ihre Grundflächen zu einander.

Es werde (Fig. 188.) das Parallelopipedum AD von der Ebene EF parallel mit den gegenüberliegenden Seitenflächen AH und LD geschnitten, so verhalten sich die hiedurch entstehenden Körper AK und JD wie ihre Grundflächen AE und JC.

Beweis.

Man verlängere die Linie AL über L und A, mache LP $=$ PQ $=$ JL und AN $=$ NO $=$ JA, und vollende sowohl die Parallelogramme AR, RO, CP, YQ, als auch die Körper NH, OV, LX, PZ.

Hier ist JA $=$ AN $=$ NO, folglich auch
EA $=$ AR $=$ RO (I, 36. S.) und
EH $=$ HR $=$ RS, und ferner
AH $=$ NV $=$ OS (XI, 24. S.)
Es sind aber in den drei Körpern KA, AV und VO den so ebengenannten Ebenen eines jeden die ihnen gegenüberliegenden gleich (XI, 24. S.) folglich ist auch
KA $=$ AV $=$ VO (XI, 10. Erkl.)
Eben dieses kann aus gleichen Gründen von den drei Körpern JD, DP und PJ bewiesen werden, und es ist
JD $=$ DP $=$ PJ. Folglich ist OE von AE das

ebenso Vielfache, als es OK von AK ist; so wie auch EQ von JC das ebenso Vielfache ist, als KQ von JD, d. h. OE und OK sind von AE und AK, so wie auch EQ und KQ von JC und JD gleich Vielfache. Es ist daher, wenn

OE = EQ, auch OK = KQ. Ferner wenn

OE > EQ, auch OK > KQ und wenn

OE < EQ, auch OK < KQ, daher ist

AE : JC = AK : JD.

Der 26. Satz.

Aufgabe.

An einen gegebenen Punct einer gegebenen geraden Linie einen körperlichen Winkel zu legen, welcher einem gegebenen gleich ist.

Es sei (Fig. 189.) BA die gegebene gerade Linie, und es soll an dem Puncte A ein körperlicher Winkel gebildet werden, welcher dem gegebenen körperlichen Winkel bei D gleich ist.

Auflösung.

Der gegebene körperliche Winkel D sei von den ebenen Winkeln CDE, EDF und FDC eingeschlossen. Man ziehe von einem in DF willkührlich gewählten Puncte F auf die Ebene durch CD und DE das Loth FG und die Verbindungslinie DG, mache ∢ BAK = ∢ EDC und

∢ BAJ = ∢ EDG (I, 23. S.) so ist auch

∢ KAJ = ∢ CDG (I, 10. Gr.) Nun mache man AJ = DG, und errichte auf der Ebene durch KA und AB im Puncte J die JH lothrecht, nehme JH = GF und ziehe AH, so ist der körperliche Winkel bei A, der von den ebenen Winkeln KAB, BAH und HAK begrenzt wird, dem gegebenen Winkel D gleich.

Beweis.

Man mache AB = DE, AK = DC, und ziehe die Linien BJ, JK, KB, BH und HK, ferner die Linien EG, GC, CE, EF und FC, so müssen die Linien FG und HJ, weil sie auf den Ebenen lothrecht stehen, auch auf jenen Linien senkrecht

seyn, welche in diesen Ebenen aus G und J gezogen sind: (XI, 3. Erkl.)

Nun ist in den Dreiecken BAJ und EDG

$\measuredangle$ BAJ $=$ $\measuredangle$ EDG auch

BA $=$ ED und

AJ $=$ DG, folglich

BJ $=$ EG (I, 4. S.) ferner ist

JH $=$ GF, ferner

$\measuredangle$ BJH $=$ $\measuredangle$ EGF $=$ R, daher auch

BH $=$ EF (I, 4. S.) Ferner ist in den Dreiecken AJH und DGF

$\measuredangle$ AJH $=$ $\measuredangle$ DGF $=$ R, ferner

AJ $=$ DG und

JH $=$ GF auch

AH $=$ DF (I, 4. S.) Es war aber

AB $=$ DE, folglich ist auch

$\measuredangle$ BAH $=$ $\measuredangle$ EDF (I, 8. S.)

Da nun auch in den Dreiecken AJK und DGC die Winkel bei A und D nebst den sie einschließenden Seiten einander gleich sind, so ist JK $=$ GC (I, 4. S.) Es ist aber auch

JH $=$ GF, und

$\measuredangle$ HJK $=$ $\measuredangle$ FGC $=$ R, folglich

HK $=$ FC (I, 4. S.) Es war aber auch

AH $=$ DF und

AK $=$ DC, daher ist (I, 8. S.)

$\measuredangle$ HAK $=$ $\measuredangle$ FDC. Ferner war aber auch

$\measuredangle$ BAH $=$ $\measuredangle$ EDF, und

$\measuredangle$ KAB $=$ $\measuredangle$ CDE, folglich muß der körperliche Winkel bei A jenem bei D gleich seyn. (XI, 10. Erkl.)

Der 27. Satz.

Aufgabe.

Auf einer gegebenen geraden Linie ein Parallelopipedum zu errichten, welches einem gegebenen Parallelopipedum ähnlich sei, und ähnlich liege.

Es sei (Fig. 190.) AB die gegebene gerade Linie, CD das gegebene Parallelopipedum, und man soll auf AB ein Parallelopipedum beschreiben, welches dem gegebenen CD ähnlich ist;

Auflösung.

Man lege an AB in A einen körperlichen Winkel, (XI, 26. S.) welcher dem körperlichen Winkel bei C gleich ist; so, daß ∢ BAH = ∢ ECF, ferner
∢ BAJ = ∢ ECG, und
∢ HAJ = ∢ FCG ist. Nun mache man
EC : CG = BA : AJ und
CG : CF = AJ : AH (VI, 12. S.) so ist auch
EC : CF = BA : AH. Nun vollende man sowohl das Parallelogramm BJ, als das Parallelopipedum AK.

Beweis.

Da hier ∢ BAJ = ∢ ECG, und die diese Winkel bildenden Seiten einander proportional sind, so ist das Parallelogramm BJ dem Parallelogramme EG ähnlich, (VI, 4. S.) und aus gleichem Grunde auch JH ∽ GF und HB ∽ FE. Nun sind in den beiden Körpern AK und CD den hier genannten Ebenen eines jeden die ihnen gegenüberliegenden Ebenen gleich und ähnlich. (XI, 24. S.) Folglich ist auch der Körper AK dem Körper CD ähnlich. (XI, 10. Erkl.)

Der 28. Satz.

Lehrsatz.

Wenn ein Parallelopipedum von einer Ebene durch die Diagonale zweier gegenüberliegenden Seitenflächen durchschnitten wird, so wird es hierdurch halbirt.

Es werde (Fig. 191.) das Parallelopipedum AB von einer Ebene durch die Diagonalen CF und DE durchschnitten, so ist es hierdurch halbirt.

Beweis.

Da hier △ CGF ≅ △ CBF (I, 34. S.) und △ DAE ≅ △ DHE, und da ferner die Parallelogramme CA und BE

(XI, 24. S.) und GE und CH einander gleich sind, ferner die Durchschnittsebene CFED beiden Körpern gemein ist, so muß auch das Prisma CGFDAE dem Prisma CFBDEH gleich seyn. (XI, 10. Erkl.)

Der 29. Satz.

Lehrsatz.

Parallelopipeden auf einerlei Grundfläche und von gleicher Höhe, deren Seitenlinien sich in einerlei geraden Linie endigen, sind einander gleich.

Wenn (Fig. 192.) die Parallelopipeden AH und AJ, welche einerlei Grundfläche AB und gleiche Höhe haben, und deren Seitenlinien AF, AG, KL, LM, und CD, CE, BH, BJ sich in einerlei geraden Linien FM und DJ endigen, sind einander gleich.

Beweis.

Da hier CB = DH = EJ (I, 34. S.) so ist auch
DE = HJ und weil auch
DC = HB und
EC = JB, so hat man
△ DEC = △ HJB (I, 8. S.) Aus gleichem Grunde ist auch △ FGA = △ LMK. Es ist aber
FE = LJ (I, 36. S.) ferner
AD = KH (XI, 24. S.) und
AE = KJ. Daher ist das Prisma EFAC dem Prisma JLKB gleich. (XI, 10. Erkl.) Wenn man daher jedem dieser Prismen den Körper ABHG beifügt, so ist das Parallelopipedum AH dem Parallelopipedum AJ gleich.

Der 30. Satz.

Lehrsatz.

Parallelopipeden von einerlei Grundflächen und Höhen, deren Seitenlinien sich nicht in einerlei geraden Linien endigen, sind einander gleich.

Es seien (Fig. 193.) die Parallelopipeden CM und CL auf der nämlichen Grundfläche AB und von gleicher Höhe und ihre Seitenlinien AF und AG, CD und CE, KL und KM, BH und BJ liegen nicht in einerlei geraden Linien, so ist das Parallelopipedum CM dem Parallelopipedum CL gleich.

Beweis.

Man verlängere die Linien EG und JM über G und M, desgleichen die Linien FL und DH über L und H bis sie in den Puncten N, O und Q zusammentreffen, und ziehe die Verbindungslinien NA, OK, PC und QB, so entsteht ein drittes Parallelopipedum ABQN, welches sowohl mit dem ersten ABDL, als mit dem zweiten ABEM einerlei Grundfläche AB und einerlei Höhe hat, und dessen Seitenlinien sich mit jenen der beiden ersten in einerlei geraden Linien befinden; nämlich bei dem dritten und ersten in FO und DQ, bei dem dritten und zweiten in NE und OJ. Folglich ist

ABDL = ABQN (XI, 29. S.) und ferner

ABEM = ABQN, folglich auch

ABDL = ABEM. (I, 1. Gr.)

Der 31. Satz.

Lehrsatz.

Wenn Parallelopipeden gleiche Grundflächen und gleiche Höhen haben, so sind sie einander gleich.

Es seien (Fig. 194.) ABEG und CDFN zwei Parallelopipeden, welche gleiche Grundflächen, AB und CD, und auch gleiche Höhen haben, so sind sie einander gleich.

Beweis. Erster Fall.

Wenn die Seitenlinien AG und BE, CN und DF auf den Grundflächen AB und CD lothrecht sind. Hier sind die Winkel AKB und CQD entweder einander gleich oder ungleich.

I. Wenn diese Winkel ungleich sind, so sei $\measuredangle$ AKB $<$ $\measuredangle$ CQD. Man verlängere CQ nach S, und mache $\measuredangle$ SQT $=$ $\measuredangle$ AKB (I, 23. S.) ferner QS $=$ KA, und QT $=$ KB.

Man vollende das Parallelogramm TS und das Parallelopipedum TSZM. Man verlängere DQ und XT bis sie in a zusammentreffen und ziehe durch S die Sd mit DA parallel. Auch verlängere man OD und dS bis sie in c zusammentreffen, und vollende die Parallelopipeden aSZb und QceR, so ist TS = aS (I, 35. S.) und TSZM = aSZb (XI, 29. S.) weil beide einerlei Grundfläche QZ und einerlei Endungslinien bY und aX haben.

Da nun KA = QS, ferner
KB = QT, und
$\measuredangle$ AKB = $\measuredangle$ SQT, so ist
AB $\backsimeq$ TS. (VI, 1. Erkl.)

Ebenso ist, weil die durch die Lothe KL und QR bestimmten Höhen einander gleich sind, auch BL $\backsimeq$ RT und AL $\backsimeq$ RS. Daher muß auch ABEG $\doteq$ TSZM = aSZb seyn. (XI, 24. S. und 10. Erkl.)

Da ferner AB = TS = aS und
AB = CD, so ist auch
CD = aS und folglich
CD : DS = aS : DS.

Da Ce durch die Parallel-Ebene FQ geschnitten wird, so ist CDFN : QceR = CD : DS = aS : DS (XI, 25. S.) Aus gleichem Grunde ist auch, da ae durch die Parallel-Ebene QZ geschnitten wird

aSZb : QceR = aS : DS, folglich ist
CDFN : QceR = aSZb : QceR, und daher muß
CDFN = aSZb = ABEG seyn.

II. Wenn aber $\measuredangle$ AKB = $\measuredangle$ CQD ist, so seien CQ und DQ so verlängert, daß QS = KA und
Qa = KB ist. Hier ist nun
$\measuredangle$ SQa = $\measuredangle$ CQD = $\measuredangle$ AKB (I, 15. S.)
Daher wird wie zuvor bewiesen, daß
ABEG = aSZb (XI, 10. Erkl.) desgleichen, daß CDFN = aSZb (XI, 25. S.) und folglich, daß ABEG = CDFN sei. (I, 1. Gr.)

Zweiter Fall.

Wenn die Seitenlinien (Fig. 195.) AG und BE, CN und DF nicht senkrecht auf den Grundflächen AB uud CD stehen.

Hier fälle man von den Puncten G, M, K und E; desgleichen von N, Q, S und F auf die Grundflächen AB und CD Lothe, und vollende die senkrechten Parallelopipeden KX und SZ. Da diese nun gleiche Grundflächen EG und FN, auch gleiche Höhen haben, so sind sie nach dem ersten Falle einander gleich.

Es ist aber KX = ABEG (XI, 29. S.) und
SZ = CDFN, folglich auch
ABEG = CDFN. (I, 1. Gr.)

Der 32. Satz.

Lehrsatz.

Wenn Parallelopipeden gleiche Höhe haben, so verhalten sie sich wie ihre Grundflächen.

Wenn (Fig. 196.) die zwei Parallelopipeden AB und CD einerlei Höhe haben, so verhalten sie sich wie ihre Grundfläche AE und CF.

Beweis.

Man lege an die Linie GF das Parallelogramm FH = AE (I, 45. S.) und vollende das Parallelopipedum GJ, so ist GJ = AB (XI, 31. S.) Weil aber CJ von der Ebene GD geschnitten wird, welche mit zwei Seitenflächen des Parallelopipedums CJ parallel ist, so verhält sich GJ : CD = FH : CF (XI, 25. S.) daher ist auch AB : CD = AE : CF.

Der 33. Satz.

Lehrsatz.

Aehnliche Paralleloipiden stehen im dreifach höheren Verhältnisse ihrer homologen Seiten.

Es seien (Fig. 197.) die Parallelopipeden AB und CD einander ähnlich, so verhält sich jener Körper zu diesem, wie (AE : CF).3

Beweis.

Man verlängere die Linien AE, GE und HE, mache EJ = CF, EK = FM und EL = FQ. Ferner vollende man das Parallelogramm KJ, und die Körper OJ und KP; ebenso auch das Parallelogramm GJ., und den Körper EN.

Da nun CD ∾ AB, so ist auch

∡ MFC = ∡ GEA (XI, 9. Erkl. und VI, 1. Erkl.)

Auch ist ∡ MFC = ∡ GEA = ∡ KEJ (I, 15. S.) Nun ist CF = EJ und FM = EK, folglich ist

CM ≋ JK. (VI, 1. Erkl.)

Ebenso wird bewiesen, daß auch

QC ≋ JL und DF ≋ EO. Daher ist auch

CD ≋ OJ (XI, 24. S. und 10. Erkl.)

Da nun AB ∾ CD ∾ OJ, so ist auch

AE : EJ = GE : EK = HE : EL (XI, 9. Erkl. und VI, 1. Erkl.) ferner ist

AE : EJ = AG : GJ = AB : EN und

GE : EK = GJ : JK = EN : KP. Endlich

HE : EL = HJ : JL = KP : OJ (VI, 1. S. und XI, 32. S.) Daher ist nun auch

AB : EN = EN : KP = KP : OJ, und daher

AB : OJ = (AB : EN)³ = (AE : EJ).³ Nun war aber OJ = CD und EJ = CF, folglich ist

AB : CD = (AE : CF).³

Zusatz.

Hieraus geht hervor: daß, wenn vier gerade Linien proportional sind, die erste sich zur vierten verhält, wie das Parallelopipedum über der ersten zu dem ihm ähnlichen und ähnlich liegenden Parallelopipedum über der zweiten, weil die erste Linie zur vierten ein dreifach höheres Verhältniß hat, als die erste zur zweiten.

Der 34. Satz.

Lehrsatz.

Wenn zwei Parallelopipeden einander gleich sind, so stehen ihre Grundflächen im umgekehrten

Verhältnisse ihrer Höhen, und wenn die Grundflächen zweier Parallelopipeden im umgekehrten Verhältnisse ihrer Höhen stehen, so sind diese Körper einander gleich.

Es seien (Fig. 198.) die zwei Parallelopipeden AB und CD einander gleich, so sind ihre Grundflächen AK und CO im umgekehrten Verhältnisse ihrer Höhen, und wenn diese Grundflächen AK und CO im umgekehrten Verhältnisse ihrer Höhen stehen, so ist AB = CD.

Beweis. Erster Fall.

Wenn die Seitenlinien AG und KB, CL und OD auf den Grundflächen AK und CO lothrecht stehen, so sind AG und CL die Höhen der beiden Parallelopipeden, und es ist zu beweisen.

I. Wenn AB = CD, daß nun AK : CO = CL : AG. Nun sind aber diese Grundflächen AK und CO entweder gleich oder ungleich. Wenn AK = CO ist, so muß, wegen AB = CD, auch CL = AG seyn (XI, 31. S.) und es ist offenbar AK : CO = CL : AG.

Sind aber die Grundflächen ungleich, und etwa

AK > CO, so ist, weil

AB = CD, auch

CL > AG (XI, 31. S.) Nimmt man daher

CR = AG, und vollendet den Körper CS, so ist, wegen AB = CD, auch

AB : CS = CD : CS.

Nun ist aber

AB : CS = AK : CO, (XI, 32. S.) und

CD : CS = CQ : PR (XI, 25. S.) = CL : CR (VI, 1. S.) Daher muß auch

AK : CO = CL : CR seyn. Es ist aber

CR = AG, folglich auch

AK : CO = CL : AG.

II. Wenn AK : CO = CL : AG, nun auch AB = CD sei. Hier sind, wie zuvor, die Grundflächen AK und CO entweder gleich oder ungleich. Ist AK = CO, so ist auch

CL = AG und daher
AB = CD. (XI, 31. S.)
Ist aber AK > CO, so muß auch
CL > AG seyn. Man mache daher
CR = AG und vollende den Körper CS, so ist
AK : CO = CL : CR. Es ist aber
AK : CO = AB : CS, (XI, 32. S.) und
CL : CR = CQ : PR (VI, 1. S.) = CD : CS
(XI, 25. S.) Daher ist
AB : CS = CD : CS und folglich auch
AB = CD.

Zweiter Fall.

Wenn (Fig. 199.) die Seitenlinien AG und KB, ferner CL und OD auf den Grundflächen AK und CO nicht senkrecht sind, so ziehe man von den Puncten G, F, B und J, desgleichen von L, N, D und Q die Lothe auf die Grundflächen und vollende die senkrechten Parallelopipeden TB und aD. Daher ist TG die Höhe der beiden Körper TB und AB (VI, 4. Erkl.) so wie auch aL die Höhe der beiden Körper aD und CD ist.
Nun muß bewiesen werden

I. Wenn AB = CD ist, daß alsdann auch
AK : CO = aL : TG sei. Da hier
AB = TB (XI, 29. S.) und ferner
CD = aD (XI, 30. S.) so ist, weil
AB = CD, auch TB = aD, folglich, nach dem ersten Falle, TS : aZ = aL : TG. Nun ist aber
TS = AK und aZ = CO (XI, 24. S.) folglich muß auch AK : CO = aL : TG seyn.

II. Wenn aber AK : CO = aL : TG, daß nun
AB = CD sei.
Da hier AK = TS (XI, 24. S.) und auch
CO = aZ, so ist
TS : aZ = aL : TG und folglich, nach dem ersten Falle, TB = aD. Nun ist aber
TB = AB (XI, 29. S.) und
aD = CD (XI, 30. S.) folglich
muß AB = CD seyn.

Der 35. Satz.

Lehrsatz.

Wenn man aus den Scheitelpuncten zweier gegebenen ebenen gleichen Winkel auf ihre Ebenen zwei gerade Linien aufstellt, welche mit den Schenkeln der gegebenen Winkel, einzeln genommen, gleiche Winkel bilden; wenn man ferner in diesen aufgestellten Linien zwei willkührliche Puncte nimmt, aus diesen auf die zuerst gegebenen Winkel-Ebenen zwei Lothe zieht, und von den Puncten, worin diese Lothe in den Ebenen eintreffen, nach den Scheitelpuncten der zuerst gegebenen Winkel zwei gerade Linien zieht, so bilden diese mit den aufgestellten Linien gleiche Winkel.

Es seien (Fig. 200.) BAC und EDF die zwei gegebenen Winkel, aus deren Scheitelpuncten A und D die Linien AG und DL so über die Winkel-Ebenen aufgestellt sind, daß $\measuredangle$ BAG $=$ $\measuredangle$ EDL und $\measuredangle$ GAC $=$ $\measuredangle$ LDF, ferner seien G und L die willkührlichen Puncte, GK und LM die aus ihnen auf die Winkel-Ebenen gezogenen Lothe, und KA und MD die Verbindungslinien, so ist $\measuredangle$ KAG $=$ $\measuredangle$ MDL.

Beweis.

Man nehme AH $=$ DL, und ziehe durch H mit dem Lothe GK, die HJ gleichlaufend, welche demnach auf der Ebene BAC (XI, 8. S.) folglich auch auf den Linien JA, JB, JC lothrecht steht (XI, 3. Erkl.) Von J und M fälle man auf die Schenkel der gegebenen Winkel die Lothe JB, JC und ME, MF, und ziehe endlich die Verbindungslinien BC, CH, HB und EF, FL, LE.

Da HJ auf JA, ferner die JC auf AC und die HJ auf JC lothrecht ist, so hat man

Quadr. AH $=$ Quadr. AJ $+$ Quadr. JH (I, 47. S.)
Quadr. AJ $=$ Quadr. AC $+$ Quadr. CJ und
Quadr. CJ $+$ Quadr. JH $=$ Quadr. HC. Daher ist
Quadr. HA $=$ Quadr. AC $+$ Quadr. HC und folglich

$\measuredangle$ HCA = R (I, 48. S.) Auf gleiche Art ist auch
$\measuredangle$ LFD = R, folglich
$\measuredangle$ HAC = $\measuredangle$ LFD. Es ist aber auch
$\measuredangle$ AHC = $\measuredangle$ LDF und
AH = DL, folglich
AC = DF (I, 26. S.)

Da nun eben so die HJ auf JA, die JB auf BA, und die HJ auf JB senkrecht steht, so wird auf gleiche Art bewiesen, daß $\measuredangle$ HBA = $\measuredangle$ LED = R, und AB = DE ist.

Da nun die Winkel BAC und EDF nebst den sie bildenden Seiten einander gleich sind, so ist BC = EF (I, 4. S.)
und $\measuredangle$ BCA = $\measuredangle$ EFD.

Nun ist aber $\measuredangle$ JCA = $\measuredangle$ MFD = R, folglich auch
$\measuredangle$ BCJ = $\measuredangle$ EFM (I, 3. Gr.) Aus gleichem Grunde ist $\measuredangle$ JBC = $\measuredangle$ MEF. Es war aber
BC = EF, folglich ist
CJ = FM (I, 26. S.) Nun war
AC = DF, und
$\measuredangle$ JCA = $\measuredangle$ MFD, folglich ist
AJ = DM (I, 4. S.) und daher
Quadr. AJ = Quadr. DM.

Da HJ lothrecht auf JA und LM lothrecht auf MD ist, so hat man Quadr. HA = Quadr. AJ + Qdr. JH (I, 47. S.)
und Quadr. LD = Quadr. DM + Quadr. ML. Es war aber HA = LD, daher ist
Quadr. HA = Quadr. LD, folglich auch
Quadr. AJ + Qdr. JH = Qdr. DM + Qdr. ML
Allein Quadr. AJ = Quadr. DM, folglich ist
Quadr. JH = Quadr. ML (I, 3. Gr.) und daher
JH = ML. Es war aber auch
AJ = DM und
AH = DL, folglich ist
$\measuredangle$ KAH = $\measuredangle$ MDL (I, 8. S.)

Zusatz.

Hierdurch ist bewiesen: Wenn man aus den Scheitelpuncten zweier gleichen ebenen Winkel zwei gleiche gerade Linien so

aufstellt, daß die Winkel, welche sie mit den Schenkeln der zuerst gegebenen Winkel bilden, einzeln genommen, einander gleich sind, so müssen auch die, von den Endpuncten der aufgestellten Linien auf die zuerst gegebenen Winkel-Ebenen gefällten Lothe einander gleich seyn.

Der 36. Satz.

Lehrsatz.

Wenn drei gerade Linien proportional sind, so ist das Parallelopipedum, welches aus allen dreien gebildet werden kann, dem gleichseitigen und mit jenem gleichwinkeligen Parallelopipedum aus der mittleren Linie gleich.

Es sei (Fig. 201.) A : B = B : C, so ist das aus den Linien A, B und C gebildete Parallelopipedum dem aus der Linie B gebildeten gleichseitigen, und mit dem ersteren gleichwinkeligen Parallelopipedum gleich.

Beweis.

Es sei E ein körperlicher Winkel, welcher von den drei ebenen Winkeln DEG, GEF und FED begrenzt ist. Man mache B = DE = GE = FE und vollende das Parallelopipedum EJ; dann ziehe man KL, lege an K einen körperlichen Winkel, welcher jenem bei E gleich ist, und von den drei ebenen Winkeln MKN, NKL und LKM begrenzt wird. Man nehme ferner A = KL,

B = KN und

C = KM und vollende das Parallelopipedum KH.

Da hier A : B = B : C ist, so ist auch

KL : FE = ED : KM. Da ferner

$\measuredangle$ LKM = $\measuredangle$ FED, so ist das Parallelogramm ML dem Parallelogramme DF gleich. (VI, 14. S.) Nun sind auf den gleichen Winkeln MKL und DEF in K und E die gleichen Linien KN und EG so aufgestellt, daß

$\measuredangle$ LKN = $\measuredangle$ FEG und

$\measuredangle$ MKN = $\measuredangle$ DEG.

Daher müssen die von N und G auf die Ebenen ML und DF gefällten Lothe, d. h. die Höhen (VI, 4. Erkl.) der beiden Körper einander gleich seyn. (XI, 35. Zus.) Es ist aber ferner ML = DF, folglich müssen auch die beiden Körper KH und EJ einander gleich seyn. (XI, 31. S.)

Der 37. Satz.

Lehrsatz.

Wenn vier gerade Linien proportional sind, so sind auch die auf denselben beschriebenen ähnlichen, und ähnlich liegenden Parallelopipeden einander proportional. Und wenn die auf vier geraden Linien beschriebenen ähnlichen und ähnlich liegenden Parallelopipeden proportional sind, so müssen es auch diese vier geraden Linien seyn.

Es sei (Fig. 202.) AB : CD = EF : GH, und AJ, CK, EL und GM die auf ihnen beschriebenen ähnlichen und ähnlich liegenden Parallelopipeden, so ist auch AJ : CK = EL : GM.

Und wenn umgekehrt AJ : CK = EL : GM ist, so hat man auch AB : CD = EF : GH.

Beweis.

I. Wenn AB : CD = EF : GH, so ist auch
$(AB : CD)^3 = (EF : GH)^3$. Nun ist aber
AJ : CK = $(AB : CD)^3$ (XI, 33. Zus.) und
EL : GM = $(EF : GH)^3$, folglich ist auch
AJ : CK = EL : GM.

II. Wenn aber AJ : CK = EL : GM ist, so wird, weil
AJ : CK = $(AB : CD)^3$ und
EL : GM = $(EF : GH)^3$ (XI, 33. Zus.) auch
$(AB : CD)^3 = (EF : GH)^3$ nunmehr
AB : CD = EF : GH.

Der 38. Satz.

Lehrsatz.

Wenn auf einer Ebene eine andere lothrecht steht, und von einem Puncte der ersten auf die andere ein Loth gefällt wird, so muß dieses in der Durchschnittslinie beider Ebenen eintreffen.

Wenn (Fig. 203.) auf der Ebene AB die Ebene CD senkrecht ist, und von einem Puncte E in CD ein Loth EG auf AB gefällt wird, so muß dieses in AD eintreffen.

Beweis.

Wenn das vom Puncte E in der Ebene CD auf die Ebene AB gefällte Loth nicht in AD einträfe, sondern ausserhalb derselben, wie EF, so ziehe man aus F die FG senkrecht auf AD, und die Verbindungslinie EG. Hier ist FG auf der Ebene CD lothrecht (XI, 4. Erkl.) und daher auch lothrecht auf der Linie GE (XI, 3. Erkl.) Wenn nun EF auf der Ebene AB, und somit auch auf der Linie FG senkrecht wäre (XI, 3. Erkl.), so hätte man ein Dreieck EGF, worin $\measuredangle EGF = \measuredangle EFG = R$ wäre, welches unmöglich ist. (I, 7. S.)

Der 39. Satz.

Lehrsatz.

Wenn ein Parallelopipedum durch die Mitte zweier einander gegenüberliegenden Ebenen von zweien Ebenen geschnitten wird, so wird die Durchschnittslinie dieser letzteren die Diagonale des Parallelopipedums halbiren.

Es werde (Fig. 204.) das Parallelopipdum AF durch die Mitte T und R der zwei gegenüberliegenden Ebenen CF und AH von zwei Ebenen JM und NQ geschnitten, so wird die Durchschnittslinie TR die Diagonale DG in S halbiren.

Beweis.

Man ziehe die Linien DT, TE, BR, RG. Da die Parallelen DC und FE von NO geschnitten werden, so ist

$\measuredangle$ DNT $=$ $\measuredangle$ TOE (I, 29. S.) Nun ist auch
DN $=$ EO, und
NT $=$ TO, daher auch
DT $=$ TE (I, 4 S.) und
$\measuredangle$ NTD $=$ $\measuredangle$ OTE (I, 4. S.), daher
DTE eine gerade Linie. (I, 14. S.)

Auf gleiche Art wird bewiesen, daß BR $=$ RG und BRG eine gerade Linie ist.

Da nun sowohl DB, als EG der Linie CA gleich und parallel sind, so sind auch DB und EG gleich und parallel. (I, 1. Gr. und XI, 9. S.) folglich auch DE und BG gleich und parallel. (I, 33. S.) Daher auch TR und DG in einer Ebene (XI, 7. S.) und schneiden einander in S.

Da nun DE und BG einander gleich und parallel sind, auch
DT $=$ TE und
BR $=$ RG, so ist auch
DT $=$ RG und
$\measuredangle$ DTS $=$ $\measuredangle$ SGR (I, 29. S.) Es sind aber auch die Winkel bei S einander gleich (I, 15. S.) folglich ist TS $=$ SR und DS $=$ SG. (I, 26. S.)

Der 40. Satz.

Lehrsatz.

Wenn zwei Prismen gleiche Höhen haben, und das eine von ihnen ein Parallelogramm, das andere aber ein Dreieck zur Grundfläche hat; so, daß das Parallelogramm noch einmal so groß, als das Dreieck ist, so sind beide Prismen einander gleich.

Es seien (Fig. 205.) ED und HGJLKM zwei Prismen von gleicher Höhe, die Grundfläche des ersten sei das Parallelogramm ACFE, jene des andern das Dreieck HGJ, und es sei ACFE $=$ 2 $\triangle$ GHJ, so sind die zwei Prismen einander gleich.

Beweis.

Man vollende die Parallelopipeden ED und GO. Da nun hier ACFE = 2 △ HGJ und auch

HVJG = 2 △ HGJ (I, 34. S.) so ist

ACFE = HVJG. Da aber auch die beiden Körper einerlei Höhe haben, so ist ED = OG (XI, 31. S.) Weil nun die obenbemerkten Prismen von diesen Parallelopipeden die Hälften sind, so müssen auch jene Prismen einander gleich seyn. (I, 7. Gr.)

Ende des eilften Buchs.

Das
zwölfte Buch
der
Elemente des Euclides.

Dieses Buch handelt:

1) Von den Pyramiden und Prismen. Satz 1 — 9.
2) Von dem Kegel und Cylinder. Satz 10 — 15.
3) Von der Kugel. Satz 16 — 18.

Der 1. Satz.

Lehrsatz.

Wenn in Kreisen ähnliche Vielecke beschrieben sind, so verhalten sich diese wie die Quadrate der Durchmesser von jenen.

Es seien in die Kreise (Fig. 206.) AEDCB und FKJHG die ähnlichen Vielecke ABCDE und FGHJK beschrieben, so verhält sich jenes zu diesem, wie sich das Quadrat des Durchmessers BL zum Quadrate des Durchmessers GM verhält.

Beweis.

Man ziehe die geraden Linien BE und GK, AL und FM. Da die beiden Vielecke einander ähnlich sind, so ist auch

$\measuredangle$ BAE $=$ $\measuredangle$ GFK (VI, 1. Erkl.) und daher

BA : AE $=$ GF : FK. Daher auch in den Dreiecken BAE und GFK

$\measuredangle$ AEB $=$ $\measuredangle$ FKG (VI, 6. Erkl.) Es ist aber

$\measuredangle$ AEB $=$ $\measuredangle$ ALB und

$\measuredangle$ FKG $=$ $\measuredangle$ FMG (III, 21. S.) folglich

$\measuredangle$ ALB $=$ $\measuredangle$ FMG. Es ist ferner

$\measuredangle$ BAL $=$ $\measuredangle$ GFM $=$ R (III, 31. S.) folglich $\triangle$ BAL $\sim$ $\triangle$ GFM und daher

BL : GM $=$ AB : FG (VI, 4. S.) folglich

$(BL : GM)^2 = (AB : FG).^2$ Nun ist aber

(BL : GM)^2 $=$ Qdr. BL : Qdr. GM (VI, 20. S.)

und (AB : FG)^2 $=$ ABCDE : FGHJK. Daher

ABCDE : FGHJK $=$ Quadr. BL : Quadr. GM.

Der 2. Satz.

Lehrsatz.

Kreise verhalten sich zu einander, wie die Quadrate ihrer Durchmesser.

Wenn (Fig. 207.) ABCD und EFGH die gegebenen Kreise sind, so verhält sich jener zu diesem, wie das Quadrat des Durchmessers BD zum Quadrate des Durchmessers FH.

Beweis.

Wäre nicht □. BD : □. FH = Kr. ABCD : Kr. EFGH, so sei □. BD : □. FH = Kr. ABCD : R, so muß die Fläche R entweder größer oder kleiner, als der Kreis EFGH seyn.

Erster Fall.

Es sei □. BD : □. FH = Kr. ABCD : R; so, daß

$$R < \text{Kr. EFGH}$$

oder daß

$$\text{Kr. EFGH} = R + X$$

sei.

Man schreibe in den Kreis EFGH das Quadrat EFGH, welches aus den beiden gleichen Dreiecken EFH und HGF besteht, und der Hälfte jenes Quadrates gleich ist, welches um den Kreis beschrieben werden kann (I, 41. S.), wenn man durch die Puncte E, F, G und H Tangenten zieht. Da nun das äussere Quadrat größer, als der Kreis ist, so muß seine Hälfte, folglich auch das innere Quadrat, größer, als die Hälfte des Kreises seyn.

Werden nun die Bogen EF, FG, GH und HE in den Puncten J, K, L und M halbirt, und die geraden Linien EJ, JF, FK, KG, GL, LH, HM und ME gezogen, so ist jedes der hierdurch entstehenden Dreiecke, wie etwa das Dreieck JFE, größer, als die Hälfte seines Segmentes FJE. Denn wenn man durch J eine Tangente zieht und das Parallelogramm EF vollendet, so ist dasselbe größer, als das Segment FJE, folglich seine Hälfte, das ist das Dreieck JFE, größer, als die Hälfte des Segmentes. (I, 41. S.)

Da nun eben dieses von allen Dreiecken gilt, welche entstehen, wenn man mit den Halbirungen der Bogen fortfährt, und folglich auf diese Weise vom Kreise EFGH mehr, als die Hälfte weggenommen wird, und vom Reste wieder mehr, als die Hälfte und so immer fort, so bleiben zuletzt Segmente wie EJ, JF, FK u. s. w. übrig, welche zusammengenommen kleiner sind, als jede willkührlich angenommene Fläche X. (X, 1. S.) Es war aber Kr. EFGH = R + X. Folglich

$$\text{ist das Vieleck EJFKGLHM} > R.$$

Nun beschreibe man in den Kreis ABDC ein dem vorigen ähnliches Vieleck ANBOCPDQ, so ist

Quadr. BD : Quadr. FH = Viel. ANB.... : Viel. EJF....
(XII, 1. S.)

Es ist aber nach der Annahme

Quadr. BD : Quadr. FH = Kr. ABCD : R, folglich

Kr. ABCD : R = Viel. ANB.... : Viel. EJF....

Da nun offenbar

Kr. ABCD > Viel. ANB.... ist, so müßte auch Fläche R > Viel. EJF.... seyn, welches dem vorher Bewiesenen, daß

Viel. EJF... > R widerspricht.

Es ist daher unmöglich, daß die Proportion

Quadr. BD : Quadr. FH = Kr. ABCD : R statt finden kann, wenn R < Kr. EFGH ist.

Allein aus eben diesen Gründen ist es auch unmöglich, daß

Quadr. FH : Quadr. BD = Kr. EFGH : Z sei, wenn

Z < Kr. ABCD ist.

Zweiter Fall.

Es sei nun

Quadr. BD : Quadr. FH = Kr. ABCD : R; so, daß

R > Kr. EFGH ist. Für diesen Fall ist auch

Quadr. FH : Quadr. BD = R : Kr. ABCD. Nun mache man R : Kr. ABCD = Kr. EFGH : Z so, daß, weil

R > Kr. EFGH, nun auch

Kr. ABCD > Z ist. Daher wäre

Quadr. FH : Quadr. BD = Kr. EFGH : Z, welches aber, weil Z < Kr. ABCD ist, nach dem ersten Falle unmöglich ist.

Der 3. Satz.

Lehrsatz.

Jede dreiseitige Pyramide kann in zwei gleiche, einander selbst und der ganzen ähnliche Pyramiden und in zwei gleiche Prismen getheilt werden,

welche zusammengenommen größer, als die Hälfte der ganzen Pyramide sind.

Es sei (Fig. 208.) ABCD die gegebene dreieckige Pyramide, so kann dieselbe auf die in dem Lehrsatze angegebene Art getheilt werden.

Beweis.

Man halbire die Linien AB, BC und CA in den Puncten E, F und G, ferner die Linien DA, DB und DC in den Puncten H, J und K, und ziehe HE, EG und GH für die Pyramide AEGH und HJ, JK, KH für die Pyramide HJKD; ferner JF, FG für die beiden Prismen EBFGHJ und GFCHJK.

I. Da die beiden Pyramiden AEGH und HJKD von gleichvielen, unter sich gleich und ähnlichen Seitenflächen begrenzt werden, so sind sie ebenfalls einander gleich und ähnlich. (XI, 10. Erkl.) denn

1) Da AE = EB und AH = HD, so ist die Linie EH mit BD gleichlaufend (VI, 2. S.) Weil ferner AH = HD und BJ = JD, so ist auch HJ mit AB parallel. (VI, 2. S.) Daher muß HEBJ ein Parallelogramm seyn, und es ist

HJ = EB = AE (I, 34. S.) so wie auch

∠ JHD = ∠ BAH (I, 29. S.) Es war aber auch

HD = AH, folglich ist

△ DJH ≅ △ HEA (I, 4. S. u. VI, 4. S.)

2) Ganz auf gleiche Art wird bewiesen, daß

△ DHK ≅ △ HGA und

KD = GH sei.

3) Da die Linien DJ und HE so wie auch DK und HG einander gleich und parallel sind, so ist auch

∠ JDK = ∠ EHG (XI, 10. S.) folglich

△ DJK ≅ △ HEG. (I, 4. S. u. VI, 4. S.)

4) Ebenso wird bewiesen, daß

△ HJK ≅ △ AEG ist.

II. Nun ist die ganze Pyramide ABCD der Pyramide HJKD ähnlich (XI, 9. Erkl.) und daher muß sie auch der Pyramide AEGH ähnlich seyn.

Denn da HJ mit AB gleichlaufend ist, so sind die Dreiecke DAB und DHJ gleichwinkelig (I, 29. S.) und ihre Seiten proportional (VI, 4. S.). Daher sind beide Dreiecke einander ähnlich (VI, 1. Erkl.), welches auch von den Dreiecken DAC und DHK, so wie von den Dreiecken DBC und DJK gilt.

Allein es ist auch, weil HJ mit AB und HK mit AC parallel und folglich $\measuredangle$ BAC $=$ $\measuredangle$ JHK ist, (XI, 10. S.) das Dreieck ABC dem Dreiecke HJK ähnlich und folglich

BA : JH $=$ AD : DH $=$ AC : KH (VI, 4. S.)

III. Auch muß das Prisma, bei welchem der Grundfläche EBFG die Linie HJ gegenüberliegt, dem Prisma, bei welchem dem Dreiecke FGC als Grundfläche das Dreieck JKH gegenüberliegt, deswegen gleich seyn, weil sie einerlei Höhe haben, und wegen BF $=$ FC auch EBFG $=$ 2 $\triangle$ GFC ist. (XI, 40. S. und I, 41. S.)

IV. Die beiden so eben genannten Prismen müssen zusammengenommen größer, als die Hälfte der ganzen Pyramide ABCD seyn, wenn sie größer sind, als die beiden kleinen Pyramiden AEGH und HJKD zusammengenommen.

Wenn man die Linien JE und EF für die Pyramide EBFJ zieht, so wird auf eben diese Art, wie im ersten Theile bewiesen wurde, daß AEGH $\eqq$ HJKD, nunmehr auch dargethan,

daß EBFJ $\eqq$ HJKD. Daher ist auch

EBFJ $\eqq$ AEGH. Es ist aber offenbar

EBFGHJ $>$ EBFJ, folglich auch

EBFGHJ $>$ AEGH, daher auch

GFCHJK $>$ HJKD.

Der 4. Satz.

Lehrsatz.

Wenn zwei dreieckige Pyramiden gleiche Höhen haben und es wird jede derselben in zwei gleiche, einander selbst und der ganzen ähnliche Pyramiden und in zwei gleiche Prismen getheilt; hierauf jede der hierdurch entstehenden Pyramiden wieder auf

eben dieſe Art, und dieſes immer ſo fort, ſo verhalten ſich alle Prismen in der einen Pyramide zu allen Prismen von gleicher Anzahl in der andern, wie die Grundfläche der einen zur Grundfläche der andern.

Wenn (Fig. 209.) die zwei dreieckigen Pyramiden ABCG und DEFH auf die in dem Lehrſatze bemerkte Art getheilt werden, ſo verhalten ſich alle, durch dieſe Theilung in der erſten Pyramide entſtehende Prismen zu allen, auf ähnliche Art in der zweiten entſtehenden, wie ſich die Grundfläche ABC zur Grundfläche DEF verhält.

Beweis.

Da die beiden Pyramiden ABCG und DEFH einerlei Höhe haben, ſo ſind die von G auf das Seitendreieck ABC und von H auf das Seitendreieck DEF gefällten Lothe einander gleich. (VI, 4. Erkl.) Nun wird ſowohl das Loth aus G, als auch die Linie GC von den zwei Parallel-Ebenen ABC und OLM proportional geſchnitten. (XI, 17. S.) Da aber die Linie GC in M halbirt iſt, ſo muß auch das vorhin bemerkte Loth von der Ebene OLM halbirt werden. Es leuchtet von ſelbſt ein, daß eben dieſes auch von dem Lothe gilt, welches von H auf die Ebene DEF gezogen iſt. Da nun dieſe ganzen Lothe einander gleich ſind, ſo müſſen es auch ihre Hälften ſeyn. Daher haben die zwei Prismen KNCOLM und QVFRTS einerlei Höhe und müſſen ſich daher zu einander verhalten, wie ihre Grundflächen KNC und QVF. (XI, 28. und 32. S.) Da nun BN = NC und AK = KC, ſo iſt auch die Linie KN mit AB parallel (VI, 2. S.) und folglich $\triangle$ ABC $\sim$ $\triangle$ KNC. (VI, 4. S.)

Ganz aus gleichem Grunde iſt auch

$\triangle$ DEF $\sim$ $\triangle$ QVF. Weil aber

BC = 2 NC und EF = 2 VF, und daher

BC : EF = NC : VF iſt, ſo hat man auch

$\triangle$ ABC : $\triangle$ DEF = $\triangle$ KNC : $\triangle$ QVF. (VI, 22. S.)

Es war aber nach dem Obigen

$\triangle$ KNC : $\triangle$ QVF = Prm. KNCOLM : Prm. QVFRTS.

Folglich iſt auch

△ ABC : △ DEF = Prisma KNCOLM : Prisma QVFRTS
oder
△ ABC : △ DEF = Prisma JBNKOL : Prisma PEVQRT
(XII, 3. S.) Daher ist auch
△ ABC : △ DEF = Prm. KNCOLM + Prm. JBNKOL :
Prm. QVFRTS + Prim. PEVQRT.

Wenn nun die in den größern Pyramiden entstandenen kleinern, wie AJKO und DPQR wieder ebenso getheilt werden, so müssen sich aus gleichem Grunde die zwei Prismen in AJKO zu den beiden Prismen in DPQR verhalten, wie sich das Dreieck AJK zum Dreiecke DPQ d. h. wie sich das Dreieck ABC zum Dreiecke DEF verhält. Daher müssen sich auch die vier Prismen in ABCG zu den vier Prismen in DEFH verhalten, wie sich das Dreieck ABC zum Dreiecke DEF verhält.

Da nun auf vollkommengleiche Art der Beweis auch von den Prismen in den Pyramiden OLMG und RTSH, und überhaupt von allen andern Prismen geführt werden kann, welche aus den immer weiter fortgesetzten Eintheilungen entstehen, so ist der Lehrsatz bewiesen.

Der 5. Satz.

Lehrsatz.

Wenn dreieckige Pyramiden einerlei Höhen haben, so verhalten sie sich wie ihre Grundflächen zu einander.

Wenn (Fig. 209.) die dreieckigen Pyramiden ABCG und DEFH einerlei Höhe haben, so verhalten sie sich, wie ihre Grundflächen ABC und DEF.

Beweis.

Wenn die Proportion
△ ABC : △ DFF = Pyr. ABCG : Pyr. DEFH nicht stattfände, so sei
△ ABC : △ DEF = Pyr. ABCG : X, so muß der Körper X entweder größer oder kleiner seyn, als die Pyramide DEFH.

I. Es sei △ ABC : △ DEF = Pyr. ABCG : X; so, daß X < Pyr. DEFH oder daß Pyr. DEFH = X + R ist.

Wenn man (nach XII, 3. S.) die Pyramide DEFH in ihre Pyramiden und Prismen, und die hierdurch entstehenden kleineren Pyramiden wiederum auf eben diese Art eintheilt, und auf diese Weise immer fortfährt, so bekömmt man einmal Pyramiden, welche kleiner sind, als jede Größe R (X, 1. S.) Nun war Pyr. DEFH = X + R, folglich sind die Prismen der Pyramide DEFH > X.

Wird nun die andere Pyramide ABCG auf eben diese Art und ebenso oft getheilt, so verhalten sich die Prismen der Pyramide ABCG zu den Prismen der Pyramide DEFH, wie sich das Dreieck ABC zum Dreiecke DEF, d. h. nach der Annahme, wie sich Pyramide ABCG zu X verhält. Da aber die Prismen der Pyramide ABCG offenbar kleiner sind, als diese Pyramide ABCG, so müssen auch die Prismen der Pyramide DEFH kleiner als X seyn, welches dem Vorherbewiesenen, daß die Prismen der Pyramide DEFH größer als X sind, widerspricht.

Daher ist es nicht möglich, daß

△ ABC : △ DEF = Pyr. ABCG : X sei, weil X < Pyr. DEFH. Aus gleichen Gründen ist es aber auch unmöglich, daß

△ DEF : △ ABC = Pyr. DEFH : Z, wenn Z < Pyr. ABCG ist.

II. Es sei nun

△ ABC : △ DEF = Pyr. ABCG : X; so, daß X > Pyr. DEFH wäre. Hier wäre auch △ DEF : △ ABC = X : Pyr. ABCG.

Nun mache man

X : Pyr. ABCG = Pyr. DEFH : Z; so, daß, weil X > Pyr. DEFH, auch Pyr. ABCG > Z, folglich Z < Pyr. ABCG wäre. Daher hätte man △ DEF : △ ABC = Pyr. DEFH : Z, welches aber, weil Z < Pyr. ABCG, nach dem ersten Falle unmöglich ist.

Der 6. Satz.

Lehrsatz.

Wenn vieleckige Pyramiden gleiche Höhen haben, so verhalten sie sich wie ihre Grundflächen.

Wenn (Fig. 210.) die Pyramiden ABCDEL und FGHJKM einerlei Höhe haben, so verhalten sie sich wie ihre Grundflächen ABCDE und FGHJK.

Beweis.

Man theile die Grundflächen ABCDE und FGHJK in ihre Dreiecke ABC, ACD und ADE; ferner in FGH, FHJ und FJK, und denke sich über diesen Dreiecken solche Pyramiden, welche mit den erstern von gleicher Höhe sind.

Da nun hier

$\Delta ABC : \Delta ACD =$ Pyr. ABCL : Pyr. ACDL (XII, 5. S.), so ist

$ABCD : ACD = ABCDL : ACDL$. Es ist aber

$ACD : ADE = ACDL : ADEL$ (XII, 5. S.), folglich auch

$ABCD : ADE = ABCDL : ADEL$. Daher

$ABCDE : ADE = ABCDEL : ADEL$. Nun ist

$ADE : FJK = ADEL : FJKM$. (XII, 5. S.) Daher

$ABCDE : FJK = ABCDEL : FJKM$.

Es wird aber wie zuvor bewiesen, daß

$FGHJK : FJK = FGHJKM : FJKM$, folglich ist auch

$ABCDE : FGHJK = ABCDEL : FGHJKM$.

Der 7. Satz.

Lehrsatz.

Jedes dreieckige Prisma kann in drei dreieckige Pyramiden getheilt werden, welche einander gleich sind.

Wenn (Fig. 211.) FEDCBA das gegebene dreieckige Prisma ist, so kann dasselbe in drei unter sich gleiche dreieckige Pyramiden getheilt werden.

Beweis.

Man ziehe in dem Parallelogramme EDAB die Diagonale DB, im Parallelogramme EFCB die Diagonale EC und in dem Parallelogramme FDAC die Diagonale DC, so entstehen drei dreieckige Pyramiden ABDC, DBEC und ECFD.

Da in dem Parallelogramme ABED

$\triangle$ ABD $=$ $\triangle$ DBE (I, 14. S.) so muß auch

Pyr. ABDC $=$ Pyr. DBEC seyn, weil beide ihre gemeinschaftliche Spitze in C haben. (XII, 5. S.)

Im Parallelogramme BCFE ist ebenso

$\triangle$ FEC $=$ $\triangle$ CEB (I, 14. S.) und folglich

Pyr. FECD $=$ Pyr. CEBD, weil beide die gemeinschaftliche Spitze in D haben. (XII, 5. S.)

Es war aber vorhin

Pyr. ABDC $=$ Pyr. DBEC, folglich sind diese drei Pyramiden unter sich gleich.

Zusatz.

Hieraus folgt, daß jede Pyramide der dritte Theil eines Prisma's sei, welches mit ihr Grundfläche und Höhe gemein hat. Wenn das Prisma ein vieleckiges wäre, so kann es in dreieckige zertheilt werden, und es hat wieder der vorige Beweis Statt.

Der 8. Satz.

Lehrsatz.

Aehnliche dreieckige Pyramiden stehen in dem dreifach höhern Verhältnisse ihrer homologen Seiten.

Es seien (Fig. 212.) ABCG und DEFH zwei ähnliche dreieckige Pyramiden, so stehen sie im dreifach höhern Verhältnisse ihrer homologen Seiten BC und EF.

Beweis.

Wenn man die Parallelepipeden BJ und EN vollendet, so ist, weil die gegebenen Pyramiden einander ähnlich sind,

$\measuredangle$ BCA $=$ $\measuredangle$ EFD (XI, 9. Erkl.) Ferner

$\measuredangle$ ACG $=$ $\measuredangle$ DFH und

$\measuredangle$ BCG $=$ $\measuredangle$ EFH. Daher

BC : EF $=$ AC : DF $=$ GC : HF. Daher ist

CM $\sim$ FQ (VI, 1. Erkl.) Ferner

CJ $\sim$ FN und

CL $\sim$ FP.

Es sind aber in jeder der beiden Parallelopipeden die, den ebengenannten Seitenflächen gegenüberstehenden ihnen gleich und ähnlich (XI, 24. S.) Daher ist auch

BJ $\sim$ EN (XI, 9. Erkl.) und daher

BJ : EN $=$ (BC : EF)^3.

Da ein Prisma die Hälfte des ihm zugehörigen Parallelopipedums und eine Pyramide der dritte Theil des ihr zugehörigen Prisma ist, so muß auch die Pyramide der sechste Theil des ihr angehörigen Parallelopipedums seyn, und man hat auch

Pyr. ABCG : Pyr. DEFH $=$ BJ : EN $=$ (BC : EF)^3.

Zusatz.

Hieraus folgt, daß auch ähnliche vieleckige Pyramiden im dreifach höheren Verhältnisse ihrer homologen Seiten stehen. Denn wenn man die vieleckigen Pyramiden durch Ebenen, welche durch ihre Spitze und durch homologe Diagonalen ihrer Grundflächen gehen, in dreieckige Pyramiden verwandelt (VI, 20. S.), so verhalten sich alle dreieckige Pyramiden in der einen zu allen dreieckigen der andern, d. h. es verhält sich die eine vieleckige Pyramide zur andern, wie eine dreieckige Pyramide in der einen sich zur homologen in der andern verhält. Es stehen aber die dreieckigen Pyramiden im dreifach höheren Verhältnisse ihrer homologen Seiten, daher auch die vieleckigen.

Der 9. Satz.

Lehrsatz.

Wenn dreieckige Pyramiden einander gleich sind, so stehen ihre Grundflächen im umgekehrten Verhältnisse ihrer Höhen, und wenn sich ihre

Grundflächen umgekehrt, wie ihre Höhen verhalten, so sind die Pyramiden einander gleich.

Wenn (Fig. 213.) ABCG und DEFH zwei gleiche dreieckige Pyramiden sind, so stehen ihre Grundflächen ABC und DEF im umgekehrten Verhältnisse ihrer Höhen, und wenn dieses letztere ist, so hat auch das erstere Statt.

Beweis.

Man vollende die Parallelopipeden BJ und EN, welche mit den gegebenen Pyramiden gleiche Höhen haben.

I. Wenn nun Pyr. ABCG = Pyr. DEFH, so ist auch, weil die Pyramide der sechste Theil des ihr zugehörigen Parallelopidedums ist, BJ = EN. Folglich stehen die Grundflächen BK und EM (XI, 34. S.) und daher auch die Dreiecke ABC und DEF (I, 34. S.) im umgekehrten Verhältnisse der Höhen.

II. Wenn aber die Grundflächen ABC und DEF, folglich auch BK und EM (I, 34. S.) sich umgekehrt, wie die Höhen der beiden Pyramiden verhalten, so muß auch das Parallelopipedum BJ dem Parallelopipedum EN gleich seyn. (XI, 34. S.) Da aber die Pyramide der sechste Theil des ihr angehörigen Parallelopipedums ist, so muß auch die Pyramide ABCG der Pyramide DEFH gleich seyn.

Der 10. Satz.

Lehrsatz.

Der Kegel ist der dritte Theil jenes Cylinders, welcher mit ihm Grundfläche und Höhe gemein hat.

Es sei (Fig. 214.) der Kreis ABCD sowohl die Grundfläche des Kegels, als jene des Cylinders, welcher mit ihm die Höhe gemein hat, so ist jener der dritte Theil von diesem.

Beweis.

Wenn der Kegel der dritte Theil des Cylinders nicht wäre, so muß derselbe entweder größer oder kleiner seyn, als dieser dritte Theil.

I. Es sei Keg. $<$ 1/3 Cyl. oder 3 Keg. $<$ Cyl. d. h. Cylinder $=$ 3 Keg. $+$ X.

Man beschreibe in den Kreis, welcher die gemeinschaftliche Grundfläche des Cylinders und des Kegels ist, das Quadrat ABCD, halbire die Bogen AB, BC, CD und DA in den Puncten E, F, G und H, ziehe die geraden AE, EB, BF, FC, CG, GD, DH und HA, und denke sich durch alle Theilungspuncte die Tangenten nebst den verlängerten Seiten des innern Quadrates. Hier ist nun das innere Quadrat die Hälfte des äussern (XII, 2. S.) und jedes Dreieck, wie AEB, der Hälfte seines Parallelogramms gleich. Denkt man sich nun auf die hier entstandenen Figuren Prismen von der Höhe des Cylinders beschrieben, welche sich daher, wie ihre Grundflächen verhalten, so ist:

1) Das Prisma auf dem innern Quadrate die Hälfte des Prisma auf dem äusseren Quadrate, und daher größer als die Hälfte des Cylinders, und

2) das Prisma auf jedem Dreiecke, wie AEB, ist die Hälfte jenes Prisma, welches sich auf dem ihm zugehörigen Parallelogramme befindet, und folglich ebenfalls größer, als die Hälfte des Abschnitts vom Cylinder, dessen Grundfläche der Abschnitt BEA ist.

Setzt man nun diese hier angefangene Theilung immer weiter fort, so bleiben einmal Abschnitte vom Cylinder übrig, welche zusammen kleiner sind als jede Größe X. Gesetzt, dies sei geschehen, so ist, weil

Cylinder $=$ 3 Keg. $+$ X, nun auch

das Prisma von der Höhe des Cylinders, dessen Grundfläche von der Höhe des Cylinders, dessen Grundfläche das Vieleck AEBFCGDH ist, größer als 3 Keg. Allein eine Pyramide von gleicher Höhe und Grundfläche ist der dritte Theil des Prisma (XII, 7. S.) Folglich wäre diese Pyramide größer als ein Kegel von der nämlichen Höhe und von der Grundfläche ABCD, d. h. ein Theil wäre größer als das Ganze, was unmöglich ist.

II. Es sei Keg. $> 1/3$ Cyl. und folglich Keg. $= 1/3$ Cyl. + X, so mache man auf gleiche Weise, wie bei dem ersten Falle vom Cylinder Abschnitte gemacht worden sind, auch hier solche Abschnitte vom Kegel, welche aus denselbigen Gründen zusammengenommen kleiner sind, als jede Größe X. Daher ist aus gleichen Gründen die Pyramide von der Höhe des Cylinders, welche zur Grundfläche das Vieleck AEBFCGDH hat größer, als ein Drittheil des Cylinders. Da aber (nach XII, 7. S.) ein Prisma von der nämlichen Höhe und Grundfläche dreimal so groß, als diese Pyramide ist, so müßte auch dieses Prisma größer, als der Cylinder, d. h. der Theil müßte größer als das Ganze seyn, welches unmöglich ist.

Der 11. Satz.

Lehrsatz.

Wenn Kegel oder Cylinder einerlei Höhen haben, so verhalten sie sich wie ihre Grundflächen.

Wenn (Fig. 215.) sich über den Grundflächen ABCD und EFGH Kegel oder Cylinder befinden, welche einerlei Höhe JK = LM haben, so verhalten sie sich gegen einander, wie die ebengenannten Grundflächen.

Beweis.

Da ein Cylinder dreimal so groß ist, als ein Kegel, welcher mit ihm Grundfläche und Höhe gemein hat (XII, 10. S.) so stehen auch alle Cylinder im geraden Verhältnisse solcher Kegel, welche mit ihnen einerlei Grundflächen und Höhen haben. Wenn daher der obige Lehrsatz von den Kegeln bewiesen ist, so muß er auch von den Cylindern bewiesen seyn.

Wenn nun die Proportion

Kr. ABCD : Kr. EFGH = Keg. AK : Keg. EM

nicht Statt hätte, so setze man

Kr. ABCD : Kr. EFGH = Keg. AK : X, und es muß der Körper X entweder größer oder kleiner, als der Kegel EM seyn.

I. Es sei nun

Kr. ABCD : Kr. EFGH = Keg. AK : X und X < Keg. EM.

Wenn man die nämliche Construction wie in dem unmittelbar vorhergegangenen Satze ausführt, so ist auch hier die Pyramide FM, deren Spitze in M und deren Grundfläche das Vieleck HNEFPGQ ist, größer als X. Nun beschreibe man in den Kreis ABCD ein Polygon DRASBTCV, welches dem ebengenannten Vielecke HNEFPGQ ähnlich ist, und errichte auf dasselbe eine Pyramide BK, deren Spitze in K ist, und welche demnach mit der vorigen Pyramide gleiche Höhe hat.

Da sich nun diese Vielecke sowohl, als die Kreise, worin sie beschrieben sind, wie die Quadrate ihrer Durchmesser verhalten, (XII, 1. u. 2. S.) und die Pyramiden, welche hier entstehen, im geraden Verhältnisse ihrer Grundflächen sind (XXII, 6. S.) so ist

Pyr. BK : Pyr. FM = Kr. ABCD : Kr. EFGH.

Es war aber nach der Annahme

Kr. ABCD : Kr. EFGH = Keg. AK : X, daher ist

Keg. AK : X = Pyr. BK : Pyr. FM. Es ist aber offenbar Keg. AK > Pyr. BK, daher auch

X > Pyr. FM, welches dem zuvor Bewiesenen, Pyr. FM > X widerspricht.

Es ist daher unmöglich, daß

Kr. ABCD : Kr. EFGH = Keg. AK : X sei, wenn X < Keg. EM ist.

Aus eben diesen Gründen ist es auch unmöglich, daß Kr. EFGH : Kr. ABCD = Keg. EM : Y, wenn Y < Keg. AK ist.

II. Es sei nun

Kr. ABCD : Kr. EFGH = Keg. AK : X, so daß X > Keg. EM ist.

Hier ist auch

Kr. EFGH : Kr. ABCD = X : Keg. AK. Nun mache man

X : Keg. AK = Keg. EM : Y, so daß, weil

X > Keg. EM, nun auch

Keg. AK > Y ist. Daher ist auch

Kr. EFGH : Kr. ABCD = Keg. EM : Y, welches aber, weil Y < Keg. AK, nach dem ersten Falle unmöglich ist.

Der 12. Satz.

Lehrsatz.

Aehnliche Kegel und Cylinder stehen im dreifach höhern Verhältnisse der Durchmesser ihrer Grundflächen.

Es befinden sich (Fig. 216.) über den Kreisen ABCD und EFGH ähnliche Kegel oder Cylinder, so stehen sie im dreifach höhern Verhältnisse der Durchmesser BD und FH.

Beweis.

Es seien über den ebengenannten Grundflächen dieser Körper die Linien JK und LM ihre Axen. Da nun jeder Cylinder dreimal so gros ist, als ein Kegel von der nämlichen Grundfläche und Höhe (XII, 10. S.) so verhalten sich auch die Cylinder eben so, wie die Kegel.

Hätte nun die Proportion

$(BD : FH)^3 =$ Keg. BK : Keg. FM nicht Statt, so sei

$(BD : FH)^3 =$ Keg. BK : N, so muß der Körper N entweder größer oder kleiner seyn, als der Kegel FM.

I. Es sei nun

$(BD : FH)^3 =$ Keg. BK : N, und zugleich N < Keg. FM.

Wenn man in dem Kreise EFGH die nämliche Construction, wie in dem zehnten Satze ausführt, so muß auch hier die Pyramide GM, deren Spitze in M und deren Grundfläche das Vieleck EOFPGQHR ist, größer als N seyn. Man beschreibe in den Kreis ABCD ein Vieleck ASBTCVDX, welches dem Vorigen EOFPGQHR ähnlich ist, und errichte auf dasselbe eine Pyramide CK, deren Spitze in K ist. Es sei eine Seitenfläche der Pyramide CK das Dreieck BSK und die ihr homologe Seitenfläche der Pyramide GM das Dreieck OFM. Zieht man nun die Linien SJ und OL, so sind die dreieckigen Pyramiden BJSK und FLOM einander ähnlich (XI, 9. Erkl.) weil sie von gleich vielen, einander ähnlichen Seitenflächen begränzt werden, denn

1. Da BJ. = JS und FL = LO, so ist

BJ : JS = FL : LO. Da aber auch

$\measuredangle$ BJS $=$ $\measuredangle$ FLO, wegen Aehnlichkeit der Vielecke, so ist auch das Dreieck BJS dem Dreiecke FLO ähnlich. (VI, 6. S.)

2. Da nun auch der Kegel BK dem Kegel FM ähnlich ist, so ist auch

KJ : ML $=$ BD : FH $=$ JB : LF (XI, 24. Erkl.)

Daher KJ : JB $=$ ML : LF. Da ferner

$\measuredangle$ BJK $=$ $\measuredangle$ FLM $=$ R, so ist auch

$\triangle$ BKJ $\sim$ $\triangle$ FML (VI, 6. S.)

3. Da KJ : JB $=$ ML : LF und

JB $=$ JS, auch LF $=$ LO, so ist

KJ : JS $=$ ML : LO. Es ist aber auch

$\measuredangle$ SJK $=$ $\measuredangle$ OLM $=$ R, daher auch

$\triangle$ SKJ $\sim$ $\triangle$ OML. (VI, 6. S.)

4. Da nun $\triangle$ BKJ $\sim$ $\triangle$ FML und

$\triangle$ BJS $\sim$ $\triangle$ FLO, so ist

KB : BJ $=$ MF : FL (VI, 1. Erkl.) und

BJ : SB $=$ FL : OF.

Folglich auch KB : SB $=$ MF : FO.

Weil nun $\triangle$ SKJ $\sim$ $\triangle$ OML und

$\triangle$ BJS $\sim$ $\triangle$ FLO, so ist

KS : SJ $=$ MO : OL und

SJ : SB $=$ OL : OF. Daher auch

KS : SB $=$ MO : OF.

Werden nun die beiden Propertionen mit einander verglichen, so erhält man

KS : KB $=$ MO : MF, daher ist

$\triangle$ BKS $\sim$ $\triangle$ FMO (VI, 5. S.)

Da also, nach dem so eben Bewiesenen, die Pyramide BJSK der Pyramide FLOM ähnlich ist, so ist auch

Pyr. BJSK : Pyr. FLOM $=$ (BJ : FL)^3 $=$ (BD : FH)^3 (XII, 8. S.) Wenn man nun von allen Puncten des Umkreises, wie von S und O, gerade Linien nach den Mittelpuncten J und L zieht, und auf die hiedurch entstehenden Dreiecke Pyramiden stellt, deren Spitzen in K und in M sind, so muß aus gleichen Gründen das Verhältniß (BD : FH)^3

von jedem zusammengehörigen Paare dieser Pyramiden gelten. Nun verhält sich aber eine Pyramide BJSK bei dem ersten Kreise zu einer Pyramide FLOM bei dem zweiten Kreise, wie alle Pyramiden beim ersten Kreise zu allen Pyramiden beim zweiten, d. h. wie die ganze Pyramide CK zur ganzen Pyramide GM.

Daher ist

$(BD : FH)^3 =$ Pyr. CK : Pyr. GM. Es war aber

$(BD : FH)^3 =$ Keg. BK : N nach der Annahme.

Folglich ist auch

Keg. BK : N = Pyr. CK : Pyr. GM. Es ist aber offenbar Keg. BK $>$ Pyr. CK, daher auch

N $>$ Pyr. GM, welches dem vorher Bewiesenen, daß Pyr. GM $>$ N ist, widerspricht.

Es ist daher unmöglich, daß die Proportion

$(BD : FH)^3 =$ Keg. BK : N Statt finde, wenn

N $<$ Keg. FM ist. Aus eben diesen Gründen ist es auch unmöglich, daß

$(FH : BD)^3 =$ Keg. FM : Z sei, wenn Z $<$ Keg. BK ist.

II. Nun sei

$(BD : FH)^3 =$ Keg. BK : N, so daß

N $>$ Keg. FM sei. Hier ist auch

$(FH : BD)^3 =$ N : Keg. BK. Nun mache man

N : Keg. BK = Keg. FM : Z, so daß,

weil N $>$ Keg. FM, auch Keg. BK $>$ Z ist. Hier wäre

$(FH : BD)^3 =$ Keg. FM : Z, welches aber, weil Z $<$ Keg. BK ist, nach dem ersten Falle nicht seyn kann.

Der 13. Satz.

Lehrsatz.

Wenn ein Cylinder durch eine Ebene mit seinen einander gegenüberliegenden Grundflächen parallel durchschnitten wird, so verhalten sich die beiden hiedurch entstehenden kleineren Cylinder wie ihre Axen.

Es sei (Fig. 217.) AD der gegebene Cylinder, welcher durch HG, parallel mit BA und DC, durchschnitten wird, so verhält sich

$$AH : GD = EJ : JF.$$

Beweis.

Man verlängere die Axe EF über F und E, nehme

$EM = MK = JE$ und

$FN = NL = JF$, und lege durch M und K sowohl, als durch N und L Ebenen, welche den Grundflächen AB und CD parallel und gleich sind, und vollende die Cylinder.

Da die Axen beiderseits gleich sind, so verhalten sich die neu entstandenen Cylinder, da sie einerlei Höhe haben, wie ihre Grundflächen (XII, 11. S.) Da aber auch diese Grundflächen einander gleich sind, so sind auch die Cylinder HA, AR und RO, sowie auch die Cylinder HC, CT und TV unter sich gleich. Daher ist

KJ von EJ das ebenso Vielfache als OH von AH ist, und JL ist von JF auch das ebenso Vielfache, als GX von GD ist. Folglich sind KJ und OH von EJ und AH, so wie auch JL und GX von JF und GD gleich Vielfache. Daher ist, wenn $KJ > JL$, auch $OH > GX$.

Wenn $KJ = JL$, auch $OH = GX$ und wenn

$KJ < JL$, auch $OH < GX$. Folglich ist

$EJ : JF = AH : GD$.

Der 14. Satz.

Lehrsatz.

Wenn Kegel und Cylinder gleiche Grundflächen haben, so verhalten sie sich wie ihre Höhen.

Es haben (Fig. 218.) die Kegel ABG und CDJ, wie auch die Cylinder EB und FD gleiche Grundflächen AB und CD, so verhalten sie sich wie ihre Höhen GH und JK.

Beweis.

Da jeder Kegel der dritte Theil des ihm zugehörigen Cylinders ist, (XII, 10. S.) so verhalten sich auch die Kegel

wie die ihnen zugehörigen Cylinder. Wird nun die JK nach M verlängert, KM = GH gemacht, und der Cylinder DL vollendet, so ist derselbe dem Cylinder EB gleich, weil beide Grundfläche und Höhe gemein haben. (XII, 11. S.) Nun ist aber (XII, 13. S.)

KM : JK = DL : FD, folglich auch
GH : JK = EB : FD.

Der 15. Satz.

Lehrsatz.

Wenn Kegel oder Cylinder einander gleich sind, so stehen ihre Grundflächen im umgekehrten Verhältnisse ihrer Höhen, und wenn bei diesen Körpern die Grundflächen sich umgekehrt, wie ihre Höhen verhalten, so sind sie einander gleich.

Es seien (Fig. 219.) die Kegel ACK und EGM oder die Cylinder AN und EO einander gleich, so ist

AC : EG = LM : JK und wenn
AC : EG = LM : JK ist, so muß auch
Keg. ACK = Keg. EGM und Cyl. AN = Cyl. EO seyn.

Beweis.

Es ist klar, daß man diesen Beweis nur von den Cylindern zu führen braucht.

I. Wenn die Cylinder AN und EO einander gleich sind, so sind ihre Höhen JK und LM entweder einander gleich oder ungleich.

Wenn JK = LM ist, so muß auch
AN : EO = AC : EG seyn. (XII, 11. S.) Es ist aber
AN = EO, folglich auch AC = EG und daher
AC : EG = LM : JK.

Wenn aber LM > JK ist, so nehme man LP = JK und lege durch P eine Ebene TR mit den Grundflächen EG und QO parallel. Da nun AN = EO, so ist auch
AN : ER = EO : OR. Es ist aber
JK = LP und TR mit den beiden Grundflächen gleichlaufend. Daher hat man

AN : ER = AC : EG (XII, 11. S.) und
EO : ER = LM : LP (XII, 13. S.) Daher ist
AC : EG = LM : LP = LM : JK.

II. Wenn aber AC : EG = LM : JK ist, so hat man nach der vorigen Construction

AC : EG = LM : LP. Es ist aber
AC : EG = AN : ER (XII, 11. S.) und
LM : LP = EO : ER (XII, 13. S.) Daher auch
AN : ER = EO : ER und folglich
AN = EO.

Der 16. Satz.

Aufgabe.

Wenn zwei concentrische Kreise gegeben sind, so soll in den größern ein Vieleck von gerader Seitenzahl so beschrieben werden, daß es den kleinern Kreis nicht berührt.

Es seien (Fig. 220.) die zwei concentrischen Kreise ABCD und EFGH und es soll in den größeren das verlangte Vieleck so beschrieben werden, daß es den kleinern Kreis EFGH nicht berührt.

Auflösung und Beweis.

Man ziehe den Duchmesser BD und errichte aus G die AC senkrecht auf denselben, welche für den kleinern Kreis EFGH eine Tangente ist. (III, 16. S.) Man theile die Peripherie BAD durch fortgesetzte Halbirungen, so erhält man einmal einen Bogen JD, welcher kleiner ist als der Bogen AD. Man ziehe aus J die JKL auf BD lothrecht, und die geraden Linien JD und DL, so ist JD = DL und JL mit AC parallel. Daher berührt die Linie AC, aber nicht die JL und noch weniger die Linie JD oder DL den kleineren Kreis. Trägt man nun in den größeren Kreis gerade Linien, welche der JD gleich sind, so entsteht ein Vieleck von gleicher Seitenzahl in diesem Kreise ABCD, welches den kleinern Kreis EFGH nicht berührt.

Der 17. Satz.

Aufgabe.

Wenn zwei concentrische Kugeln gegeben sind, so soll in die größere ein vieleckiger Körper (Polyeder) so beschrieben werden, daß er die Oberfläche der kleinern Kugel nicht berührt.

Erster Theil.

Dieser erste Theil zeigt, wie man das verlangte Polyeder construiren soll. Wenn beide Kugeln durch ihren gemeinschaftlichen Mittelpunct A (Fig. 221.) von einer Ebene durchschnitten worden, so entsteht hiedurch auf der Oberfläche der beiden Kugeln ein Kreis (XI, 14. Erkl.) und zwar ein größter Kreis (III, 15. S.); in der größern Kugel sei es der Kreis BCDE, und in der kleinern der Kreis FGH. Man ziehe in diesen zwei Kreisen die Durchmesser DB und CE lothrecht auf einander, beschreibe in den größeren Kreis BCDE ein Vieleck von einer geraden Zahl gleicher Seiten, welches den kleinern concentrischen Kreis FGH nicht berührt. (XII, 16. S.) In dem Quadranten BE seien die Linien BJ, JK, KL und LE die Seiten dieses Vielecks. Man ziehe die gerade JA, verlängere sie bis M, errichte in A die AN auf der Ebene des Kreises BCDE lothrecht, welche die Oberfläche der größeren Kugel in N trifft, lege durch AN und jeden der beiden Durchmesser DB und JM Ebenen, welche ebenfalls, nach dem bereits Erwiesenen, auf der Oberfläche der Kugel größte Kreise bilden werden. Die Hälften dieser größten Kreise seien BND und JNM, welche, so wie AN, auf der Ebene BCDE senkrecht stehen (XI, 18. S.)

Da nun BD = JM = CE, so sind die halben Kreise BNDJNM und BED und daher auch die Quadranten BN, JN und BE einander gleich. So viele Seiten daher das Vieleck in BE hat, ebenso viele von gleicher Größe können auch in BN und JN seyn. Man beschreibe dieselben, nämlich BO, OP, PQ und QN in BN, ferner JR, RS, ST und TN in JN und ziehe die Verbindungslinien RO, SP und TQ, welche mit JB parallel seyn werden. Denn wenn man von O und R auf die

Ebene BCDE die Lothe OV und RX zieht, welche die Durchschnittslinien BD und JM treffen (XI, 38. S.) und man zieht noch die Linie VX, so ist, weil auch BND = JNM und BO = JR, nun auch OV = RX (I, 26. S.) und BV = JX. Da nun auch AB = AJ, so ist VX mit JB parallel (VI, 2. S.) Weil aber OV und RX einander gleich und parallel sind, (XI, 6. S.) so ist auch VX mit RO parallel (I, 33. S.) und daher auch RO mit JB gleichlaufend (XI, 9. S.) Ebenso wird nun auch bewiesen, daß SP mit RO und TQ mit SP parallel sei.

Da nun RO mit JB gleichlaufend ist, so liegt die vierseitige Figur JBOR in einer Ebene (XI, 7. S.) und aus gleichem Grunde liegt auch jede der übrigen ROPS, ferner SPQT und das Dreieck TQN, einzeln genommen, in einerlei Ebene. (XI, 2. S.)

Denkt man sich von den Puncten O und R, P und S, Q und T nach dem Mittelpuncte der Kugel A gerade Linien, so entsteht zwischen den beiden Quadraten BN und JN ein polyedrischer Körper, welcher aus Pyramiden zusammengesetzt ist, deren Grundflächen die Figuren JBOR, ROPS, SPQT, TQN sind, und deren Scheitel im Puncte A ist. Wird nun im Quadranten BE auf jeder der Seiten JK, KL und LE eine ähnliche Construction ausgeführt, wie auf BE und in der andern Halbkugel wiederum eine ähnliche, wie in dieser Halbkugel, so entsteht in der größern Kugel ein Polyeder, welches aus lauter Pyramiden von der oben bemerkten Art zusammengesetzt ist.

Zweiter Theil.

Dieser zweite Theil muß beweisen, daß das zuvor beschriebene Polyeder die Oberfläche der kleinern Kugel nicht berührt. Man ziehe von A das Loth AZ auf die Ebene JBOR und in dieser Ebene die geraden Linien ZJ, ZB, ZO und ZR, auf welchen AZ ebenfalls senkrecht steht. (XI, 3. Erkl.) Da nun AB = AJ, und in den rechtwinkeligen Dreiecken AZB und AZJ das Quadr. AB = Quadr. AZ + Quadr. ZB (I, 47. S.) und Quadr. AJ = Quadr. AZ + Quadr. ZJ, so muß auch ZB = ZJ seyn. Auf gleiche Art wird bewiesen, daß auch

ZO = ZB, und ZR = ZJ sei. Daher muß ein aus Z mit ZB beschriebener Kreis durch die vier Puncte J, B, O und R gehen, wodurch JBOR eine vierseitige Figur in diesem Kreise ist. Nun ist aber

BJ = JR = BO, aber

BJ > VX̄, daher auch

BJ > RO. Daher ist der Winkel BZJ ein stumpfer und das Quadr. von JB größer als 2 Quadrat von BC. (II, 12. S.)

Nun fälle man von J auf DB das Loth Ja und ziehe DJ. Da nun BD < 2 Da und BD : DA = Recht. aus DB und BA : Recht. aus Da und aB (II, 1. S.) = Quadr. BJ : Quadr. Ja (VI, 8. S.) so ist auch

Quadr. BJ < 2 Quadr. Ja. Es war aber

Quadr. BJ > 2 Quadr. BZ, folglich ist

2 Quadr. BZ < 2 Quadr. Ja, oder auch

Quadr. BZ < Quadr. Ja.

Da nun AB = AJ und auch

Quadr. AB = Quadr. AZ + Quadr. BZ (I, 47. S.)

ferner Quadr. AJ = Quadr. Aa + Quadr. Ja, so ist auch

Quadr. AZ + Quadr. BZ = Quadr. Aa + Q. Ja.

Es war aber Q. BZ < Quadr. Ja, daher ist auch

Quadr. AZ > Quadr. Aa und folglich

AZ > Aa. Also noch vielmehr

AZ > AG.

Ein anderer Beweis.

Daß AZ > AG kann auch so bewiesen werden. Man errichte auf AG in G das Loth GK und ziehe AK. Nun theile man den Bogen BE durch fortgesetzte Halbirungen bis einmal ein Stück, etwa BJ, übrig bleibt, welches kleiner ist, als ein Bogen, dessen Sehne GK wäre (X, 1. S.) Folglich wäre auch die Sehne BJ < GK.

Es ist aber, nach dem zuvor Bewiesenen, der Winkel BZJ ein stumpfer, folglich BZ kleiner, als BJ. Daher ist BZ auch kleiner als GK, oder Quadr. BZ < Quadr. GK.

Da aber AB = AK, und
Quadr. AB = Quadr. AZ + Q. BZ (I, 47. S.) ferner
Quadr. AK = Quadr. AG + Quadr. GK, so ist
Quadr. AZ + Quadr. BZ = Quadr. AG + Quadr. GK.
Es war aber Quadr. BZ < Quadr. GK, folglich ist
Quadr. AZ > Q. AG, und daher AZ > AG

Zusatz.

Wenn in eine andere Kugel B ein Polyeder beschrieben wird, welches dem in die Kugel A beschriebenen Polyeder ähnlich ist, so stehen diese beiden vieleckigen Körper im dreifach höhern Verhältnisse der Durchmesser ihrer Kugeln.

Theilt man diese vieleckigen Körper in gleichviele Pyramiden von einerlei Art, so sind diese Pyramiden einander ähnlich, und stehen daher im dreifach höhern Verhältnisse ihrer homologen Seiten (XII, 8. S.) d. h. eine Pyramide in der Kugel A, deren Grundfläche das Viereck JBOR und deren Scheitel in A ist, steht zu der ihr homologen Pyramide in der Kugel B im dreifach höhern Verhältnisse der Halbmesser, oder der Durchmesser beider Kugeln. Nun ist aber eine Pyramide der Kugel A zu der ihr homologen Pyramide der Kugel B wie alle Pyramiden der Kugel A zu allen homologen Pyramiden der Kugel B, d. h. wie das ganze Polyeder in der Kugel A zu dem ganzen Polyeder in der Kugel B. Daher sind diese vieleckigen Körper selbst im dreifach höhern Verhältnisse der Durchmesser ihrer Kugeln.

Der 18. Satz.

Lehrsatz.

Kugeln stehen im dreifach höhern Verhältnisse ihrer Durchmesser.

Es seien (Fig. 222.) ABC und DEF zwei Kugeln, so sind sie im dreifach höhern Verhältnisse ihrer Durchmesser BC und EF.

Beweis.

Hätte die Proportion
$(BC : EF)^3 = \text{Kug. } ABC : \text{Kug. } DEF$ nicht Statt, so sei
$(BC : EF)^3 = \text{Kug. } ABC : X$, und es müßte der Körper X entweder größer, oder kleiner, als die Kugel DEF seyn.

I. Es sei $(BC : EF)^3 = \text{Kug. } ABC : X$, so, daß $X <$ Kug. DEF sei.

Man nehme eine Kugel $GHJ = X$ concentrisch mit der Kugel DEF, beschreibe in die Kugel DEF ein Polyeder, welches die Oberfläche der Kugel GHJ nicht berührt, und in die Kugel ABC ein dem vorigen ähnliches Polyeder, so ist
$(BC : EF)^3 =$ Polyed. ABC : Polyed. DEF (XII, 17. Zus.)
Es war aber $(BC : EF)^3 =$ Kug. ABC : Kug. GHJ, folglich ist
Polyed. ABC : Polyed. DEF = Kug. ABC : Kug. GHJ.
Offenbar ist aber Polyed. ABC < Kug. ABC
daher auch Polyed. DEF < Kug. GHJ, welches offenbar irrig ist.

Es ist daher unmöglich, daß
$(BC : EF)^3 =$ Kug. ABC : X, wenn X < Kug. DEF.

Aus eben diesen Gründen ist es auch unmöglich, daß $(EF : BC)^3 =$ Kug. DEF : Z, wenn Z < Kug. ABC ist.

II. Es sei nun $(BC : EF)^3 =$ Kug. ABC : X, und X > Kug. DEF.

Nun sei X = Kug. KLM, so ist auch
$(EF : BC)^3 =$ Kug. KLM : Kug. ABC. Nun sei
Kug. KLM : Kug. ABC = Kug. DEF : Z, so, daß,
weil Kug. KLM > Kug. DEF auch
Kug. ABC > Z ist. Folglich ist
$(EF : BC)^3 =$ Kug. DEF : Z, welches
aber, weil Z < Kug. ABC ist, nach dem ersten Falle nicht seyn kann.

Ende des zwölften Buches.

Anmerkungen

zu den

geometrischen Büchern

der

Elemente des Euclides.

Anmerkungen

zum

ersten Buche des Euclides.

I. Zur 1. Erklärung. Obwohl man sich den geometrischen Punct ohne alle Theile denken muß, so ist diese Erklärung doch nicht vollkommen befriedigend, da nicht alles, was keine Theile hat, auch ein geometrischer Punct ist. Folgende Darstellung dürfte den Begriff des Puncts und die übrigen Elementar-Begriffe der Geometrie am Faßlichsten entwickeln:

a) Der Geometrie liegt der Begriff vom Raume zum Grunde, welcher darum nicht eigentlich erklärt werden kann, weil er höchst einfach ist. Auch bedarf die Vorstellung vom Raume keiner Erklärung, weil sie Jedem, durch allmählige Entwickelung seiner geistigen Anlagen, mit größter Klarheit gegeben wird. Wir erkennen in dem allgemeinen oder unendlichen Raume eine Ausdehnung, welche sich nach allen Richtungen hin ins Unendliche erstreckt; so, daß dieselbe in sich weder ein Größtes noch ein Kleinstes darbietet. Auch schreiben wir diesem allgemeinen Raume eine dreifache Hauptrichtung zu, welche durch die bekannten Worte: Länge, Breite und Tiefe bezeichnet wird.

b) Denkt man sich nun irgend einen Theil dieses endlosen Raumes in bestimmte Grenzen rings umher eingeschlossen, so fällt die Vorstellung seiner Unendlichkeit hinweg und es entsteht ein allerwärts beschränkter Körperraum, welcher ein geometrischer oder mathematischer Körper genennt wird, und wobei es ganz einerlei ist, was für eine Gestalt derselbe hat.

c) Da wir uns keinen physischen Körper, d. h. einen solchen, welcher auf unsere äussere Sinne einwirkt, vorstellen

können, ohne ihn irgendwo im Raume anzunehmen, so können wir auch dadurch zur Erkenntniß des geometrischen Körpers gelangen, daß wir bei einem physischen Körper von allen Eigenschaften, die in die Sinne fallen, z. B. Widerstand, Härte u. dgl. abstrahiren und nur den begrenzten Raum betrachten, worin sich derselbe befindet. Denn jener Raum, in welchen der physische Körper, z. B. die Kugel von Elfenbein, enthalten ist, gibt uns das Bild des geometrischen Körpers und hier z. B. der geometrischen Kugel.

d) Da nun jeder geometrischer Körper rings umher begrenzt ist, so entsteht die Frage, von welcher Beschaffenheit diese Grenzen seien. Wären sie selbst wieder geometrische Körper d. h. hätten auch diese Grenzen eine dreifache Hauptrichtung, so würde man wieder nach den Grenzen dieser körperlichen Grenzen fragen können, welche wiederum Körper seyn müßten. Auf solche Weise würde nun der geometrische Körper begrenzt und zugleich auch nicht begrenzt seyn, was widersprechend ist. Man nennt diese Grenzen der geometrischen Körper geometrische Flächen, und erkennt hieraus, daß eine solche Fläche nur zwei Hauptrichtungen, nach der Länge und Breite nämlich, aber durchaus keine dritte nach der Tiefe oder Dicke haben könne. Eine geometrische Fläche ist daher jener Raum, woran man nur eine Länge und Breite, aber durchaus keine Dicke erkennt.

e) Da nun auch die Flächen wieder begrenzt sind, so kann man sich, auf ähnliche Art wie zuvor überzeugen, daß diese Grenzen nicht wiederum Flächen seyn können, weil sonst die Fläche begrenzt und zugleich auch nicht begrenzt wäre Es müssen daher die Grenzen der Flächen eine Ausdehnung weniger haben, als die Flächen selbst und sich daher nur nach der Länge hin erstrecken, ohne irgend eine Breite zu haben. Eine geometrische Linie ist daher jener Raum, woran man nur eine Länge, aber weder Breite noch Dicke erkennt.

f) Allein auch diese Linien haben wieder ihre Grenzen und es ist klar, daß diese nicht selbst wieder Linien seyn können, da sonst die Linie begrenzt und zugleich auch nicht begrenzt

wäre. Da nun die Linie nur eine Ausdehnung nach der Länge hat, so muß ihrer Grenze durchaus keine Ausdehnung mehr zukommen. Diese Grenze der Linie ist der geometrische Punct, welcher somit weder Länge, noch Breite, noch Dicke hat und folglich ohne alle Ausdehnung ist.

g) Diese Elementarbegriffe der Geometrie lassen sich nunmehr so zusammenstellen.

Eine nach drei Hauptrichtungen ausgedehnte, rings umher begrenzte Raumgröße heißt ein geometrischer Körper; eine nach zwei Hauptrichtungen ausgedehnte, ebenfalls begrenzte Raumgröße ist eine geometrische Fläche; eine nach einer Richtung sich erstreckende Raumgröße ist die geometrische Linie, und die Grenze der einfachsten Ausdehnung im Raume, die selbst nicht mehr räumlich seyn kann, ist der geometrische Punct.

h) Hieraus folgt, daß die Linie nicht aus Puncten, die Fläche nicht aus Linien und der Körper nicht aus Flächen bestehen könne, d. h. daß neben einander gelegte Puncte keine Linien, nebeneinandergelegte Linien keine Fläche und aufeinander gelegte Flächen keinen Körper bilden. Allein es ist klar, daß man in der Linie, in der Fläche und in dem Körper überall Puncte, als die Grenzen der einfachen Ausdehnung, annehmen kann.

i) Obwohl nun der geometrische Punct kein räumlicher Gegenstand ist, so pflegt man sich zur Versinnlichung desselben ein kleines, höchst feines Körperchen, einen körperlichen Punct, vorzustellen, welcher irgendwo im Raume eine bestimmte Stelle bezeichnet. Läßt man nun dieses Körperchen nach irgend einer Richtung im Raume fortschreiten und betrachtet an dieser Bewegung nichts als die Richtung nach der Länge, so sagt man nun, eine Linie entstehe aus der Bewegung eines Puncts. Auch denkt man sich dieses bisweilen so, daß, weil in jeder Linie nach Belieben, wo man nur will, Puncte genommen werden können und einer dieser Puncte vollkommen wie der andere ist, es einer dieser Puncte sei, durch dessen Bewegung die Linie selbst entstanden ist. Da

indessen der Punct nicht im Raume vorhanden d. h. kein räumlicher Gegenstand ist, so gebricht es dieser Vorstellungsart an gehöriger Strenge.

Wenn sich eine geometrische Linie nach irgend einer Seitenrichtung fortbewegt, so erzeugt sich hierdurch eine Fläche, weil zur Richtung in die Länge noch eine zweite, in die Breite hinzukömmt. Auf ähnliche Art entsteht durch Bewegung einer geometrischen Fläche nach der dritten Hauptrichtung hin, d. h. nach der Tiefe, ein geometrischer Körper.

k) Nach dieser Entwicklung wird die erste Erklärung des Euclides und mit ihr auch die zweite deutlich seyn. Obwohl es dem systematischen Gange der geometrischen Wissenschaft zu entsprechen scheint, mit dem Einfachern zu beginnen und das Zusammengesetztere darauf zu bauen, so kann doch hier die Vorstellung des Punctes nicht an die Spitze gestellt werden, um die übrigen Erklärungen darauf zu gründen.

II. Zur 3. Erklärung. Da jede Linie, welche begrenzt ist, sowohl einen Anfang, als auch ein Ende hat, so wird der eine Punct ihr Anfangspunct und der andere ihr Endpunct genennt, und es ist klar, daß einer derselben mit dem andern vertauscht werden kann, da bei Raumgrößen überall sowohl Anfang als Ende in ihnen statt findet.

III. Zur 4. Erklärung. Diese Erklärung ist ebenfalls keine vollkommen befriedigende, da die eigentliche Natur des Geraden in der Linie aus ihr nicht gehörig erkannt wird. Indessen hat nicht bloß die Euclidische Erklärung dieses Gebrechen, sondern jede andere, welche man an ihre Stelle setzen wollte. Wenn daher Einige sagen, eine gerade Linie ist jene, welche sich immer nur nach einer Gegend hin erstreckt; oder diejenige welche zwischen zwei Endpuncten die kürzeste ist; oder jene, deren Theile der ganzen ähnlich sind; oder diejenige, welche, wenn sie sich um ihre festbleibenden Endpuncte wie um eine Axe drehet, immer in demselbigen Raume bleibt; oder eine solche, welche die Eigenschaft hat, daß ihre ganze Länge (wenn man sie senkrecht gegen das Auge hält) durch den Anfangs- und Endpunct bedeckt werden kann, u. s. w. so erkennt man

sehr leicht, daß alle diese Erklärungen dasjenige schon stillschweigend voraussetzen, was eigentlich erklärt werden soll und somit keine logisch vollkommene Erklärungen sind. Was bei einer Linie (so wie auch bei Flächen und Körpern) Gerade oder Krumm sei, lehrt uns die unmittelbare Anschauung mit solcher Klarheit, daß jede Erklärung davon überflüssig ist. Demungeachtet dienen die obenbemerkten sogenannten Erklärungen der geraden Linie sehr gut als Erläuterungen derselben.

III. Zur 5. u. 6. Erklär. Die Entwickelung des Begriffs der Fläche ist aus dem Obigen (I, c.) bereits klar, so wie auch der Inhalt der 6. Erklärung, welche, so wie die 3 Erklärung, weniger eine eigentliche Erklärung, als eine Behauptung ist, deren Wahrheit aus dem Früheren hervorgeht.

IV. Zur 7. Erklär. Diese Erklärung der Ebene ist ebenfalls keine vollkommen befriedigende. Mit mehr Faßlichkeit sagt man, eine Ebene sei jene Fläche, in welcher eine gerade Linie nach jeder Richtung ganz und gar hineinfallen kann; oder eine solche, in welcher von jedem Puncte nach jedem Puncte in ihr eine gerade Linie möglich ist.

Eine krumme Fläche ist daher jene, in welcher nicht von jedem Puncte zu jedem Puncte hin gerade Linien durchaus in sie hineinfallen.

Eine einfach gekrümmte Fläche heißt jene, in welcher gerade Linien nach mehreren Richtungen, aber nicht nach allen, möglich sind; z. B. die krumme Oberfläche einer Walze (eines Cylinders) oder eines Kegels u. s. f. Eine Fläche ist aber allseitig gekrümmt, wenn es unmöglich ist, daß eine gerade Linie auch nur nach einer Richtung ganz in sie hineinfällt; z. B. die Oberfläche einer Kugel oder eines kugelähnlichen Körpers.

V. Zur 8. Erklär. a) Diese Erklärung des Winkels, als Neigung zweier geraden Linien gegen einander, hat den Sprachgebrauch gegen sich, nach welchem man eine dieser Linien nur dann als geneigt gegen die andere anspricht, wenn sie mit ihr einen spitzen Winkel bildet; nicht aber bei dem rechten uud stumpfen Winkel. Um diese Schwierigkeit zu

vermeiden, scheint es besser, den ebenen geradlinigen Winkel nach seiner Entstehung dadurch zu erklären, daß man sagt: der ebene Winkel ist jener, welcher entsteht, wenn zwei gerade Linien mit ihren Endpuncten so zusammengestellt werden, daß sie nicht eine einzige gerade Linie bilden. Diese Linien heissen die Schenkel und ihr Vereinigungspunct ist der Scheitel des Winkels.

b) Da die Anschauung hierbei mit größter Klarheit die Oeffnung des Winkels von seiner äussern Ecke unterscheidet, so ergibt sich zugleich der Unterschied zwischen dem hohlen und erhabenen Winkel. Auch wird das Größer- und Kleinerseyn des Winkels aus seiner größern oder kleinern Oeffnung am Faßlichsten erkannt und man überzeugt sich sogleich, daß die Größe eines Winkels nicht von der Länge seiner Schenkel abhängig ist.

VI. Zur 9. Erklär. Was nun der krummlinige und gemischtlinige Winkel ist, und wievielerlei Arten des letzteren (nach Verschiedenheit der hohlen oder erhabenen Krümmung des einen Schenkels gegen den andern) es gebe, geht leicht hieraus hervor und kann durch Zeichnungen erläutert werden.

VII. Zur 10. Erklär. a) Bei dieser Erklärung der senkrechten Linie und des rechten Winkels ist es zweckmäßig, den Unterschied zwischen Sacherklärungen und Worterklärungen zu entwickeln, welcher für den wissenschaftlichen Vertrag der Geometrie von so großer Wichtigkeit ist.

b) Sacherklärungen sind jene, welche die Entstehung des zu erklärenden Gegenstandes mit solcher Klarheit und Ueberzeugung nachweisen, daß der Verstand vollkommen befriediget wird, und daß es somit keines besonderen Beweises über diese Entstehung bedarf. Von dieser Art sind die bisherigen Erklärungen der geometrischen Grundbegriffe gewesen. Auch ist die Erklärung des geradlinigen Winkels eine solche, da seine Entstehung von selbst einleuchtet.

c) Worterklärungen heissen aber jene, bei welchen die Entstehung des zu erklärenden Gegenstandes nicht von sich

selbst schon einleuchtend ist, sondern erst aus überzeugenden Gründen nachgewiesen werden muß. Diese Erklärungen bestimmen wohl mit großer Klarheit den Begriff, welchen man mit einem gewissen Worte verbindet; ob aber die Sache selbst wirklich möglich ist und die Art, wie sie entstehen kann, lassen sie unentschieden. Von dieser Art ist die hier, durch Euclides gegebene Erklärung der senkrechten Linie und des rechten Winkels. Es entsteht nämlich die Frage: Wie kann eine gerade Linie auf eine andere gerade so aufgestellt werden, daß der Winkel auf der einen Seite so groß ist, als der Winkel auf der andern? So lange dieses nicht durch eine überzeugende Construction nachgewiesen ist, bleibt es unentschieden, ob die senkrechte Linie oder der rechte Winkel wirklich gebildet werden kann oder nicht. Wie diese Worterklärung zur befriedigenden Sacherklärung werde, hat Euclides im 11. Satze des I. Buches gezeigt.

d) Hieraus folgt, daß es zwar kein wesentlicher Fehler gegen die wissenschaftliche Methode ist, dergleichen Worterklärungen, zu Anfange eines Buches, in der Reihe der Sacherklärungen aufzustellen; daß es aber durchaus nothwendig sei, alle Worterklärungen, ehe sie in den Hülfssätzen zur Begründung anderer vorkommen, durch strenge Beweise in Sacherklärungen zu verwandeln. Ueberhaupt muß jede, nicht durch sich selbst einleuchtende Behauptung, welche den Theil einer Erklärung bildet, vollkommen befriedigend erwiesen werden, wenn man sich nichts an Strenge der Darstellung vergeben will, wodurch die Geometrie einen ihrer schönsten Vorzüge verlöre.

VIII. Zur 11. u. 12. Erklär. Sobald die Entstehung des rechten Winkels nachgewiesen ist, sind diese Erklärungen des stumpfen und spitzen Winkels strenge Sacherklärungen da es sehr einfach ist, aus dem Scheitel des rechten Winkels eine gerade Linie zu ziehen, welche entweder ausserhalb oder innerhalb dieses Winkels fällt.

Auch bemerke man, daß zwei gerade Linien schief auf einander stehen, wenn sie einen stumpfen oder spitzen Winkel mit einander bilden.

Ferner, daß Nebenwinkel jene zwei Winkel genennt werden, welche einen Schenkel gemein haben und deren zwei andere Schenkel in eine gerade Linie fallen. Diese Erklärung ist, wie man leicht sieht, eine Sacherklärung.

IX. Zur 13. Erklär. Da der Begriff der Grenze in der Geometrie nur in Bezug auf Körper, Flächen und Linien vorkömmt, so ist derselbe bereits oben (I, d — g.) ausführlich entwickelt worden und die hier gegebene Erklärung des Euclides kann leicht hiernach berichtiget werden.

X. Zur 14. Erklär. Eigentlich kann eine Figur nur eine Grenze haben; nämlich die Linie, welche dieselbe einschließet; es mag diese nun eine zusammenhängende krumme Linie, oder eine Verbindung von Winkellinien, oder von geraden und krummen Linien zugleich seyn.

Figur ist daher eine von einer zusammenhängenden Linie umgränzte Fläche. Sie kann in einer Ebene oder auch in einer krummen Fläche gebildet werden und theils geradelinig, theils krummlinig, theils gemischtlinig seyn. Von den ersten spricht Euclides weiter unten (Erklär. 20 – 34).

XI. Zur 15. Erklär. Die Erklärung, welche Euclides hier von der Kreislinie gibt, ist eine bloße Worterklärung, da sie nicht zeigt, wie dieselbe entstehen kann. Diese Entstehung ist indessen sehr leicht dadurch nachzuweisen, daß man sich in einer Ebene irgend eine begrenzte gerade Linie denkt und nun annimmt, sie drehe sich in dieser Ebene um ihren einen festbleibenden Endpunct einmal ganz und gar herum, bis sie in ihre erste Lage zurückkehrt. Hierdurch wird der bewegte Endpunct diese Kreislinie beschreiben. Wollte man hier den Einwurf machen, aus Bewegung eines Punctes könnte keine Linie entstehen, so kann man zum Theil auf dasjenige verweisen, was oben (I, i.) hierüber bemerkt ist, theils kann man sich vorstellen, die in der Ebene umherbewegte Linie beschreibe eine ebene Figur (I, i.) deren Grenze eine Linie seyn muß (I, e.) welche hier von dem feststehenden Puncte überall gleiche Entfernung hat.

Hieraus folgt auch, daß man Kreisfläche und Kreislinie wohl von einander unterscheiden muß. Unter dem allgemeinen Worte Kreis wird bald jene, bald diese verstanden.

XII. Zur 16. Erklär. So wie dieser unbewegt bleibende Punct der geraden Linie, welche den Kreis erzeuget, der Mittelpunct heißt, so wird ihr anderer Endpunct der beschreibende Punct genennt. Diese Linie selbst heißt, in Bezug auf die durch sie entstehende Kreisfläche, die beschreibende Linie.

XIII. Zur 17. Erklär. a) Jede gerade, vom Mittelpuncte zum Umfang eines Kreises gezogene Linie heißt ein Halbmesser oder Radius des Kreises. Da nun in dem nämlichen Kreise alle Halbmesser einander gleich sind, so müssen es auch alle Durchmesser in demselben seyn.

Auch sind folgende Sätze hieraus klar: Wenn aus dem Mittelpuncte des Kreises eine gerade Linie gezogen wird, welche kleiner als der Halbmesser desselben ist, so liegt sie ganz innerhalb der Kreisfläche und ihr Endpunct trifft die Peripherie nicht. Ist aber diese, vom Mittelpuncte ausgehende gerade Linie größer als der Halbmesser, so muß ein Theil von ihr ausserhalb des Kreises liegen.

b) Wenn nun in dieser Erklärung noch gesagt wird, daß der Durchmesser den Kreis halbirt, so ist dieses eigentlich eine Behauptung, welche bewiesen werden muß. Dieser Beweis wird deshalb hier ausgeführt, weil er ohne weitere Hülfssätze der Geometrie gegeben werden kann.

Lehrsatz.

Der Durchmesser theilt die Kreisfläche und die Kreislinie in zwei vollkommen übereinstimmende Theile.

Es sei (Fig. 223.) AMBN der gegebene Kreis und AB ein Durchmesser in ihm, so soll bewiesen werden, daß der Theil AMB dem Theile ANB vollkommen übereinstimmend ist.

Beweis.

Denkt man sich das eine Stück der Kreisfläche, etwa AMB um den unbeweglichen Durchmesser AB auf die entgegengesetzte Seite gelegt, so muß dasselbe einmal ganz in die Ebene

fallen, worin sich auch das zweite Stück ANB befindet. Sollte nun der Bogen AMB den Bogen ANB nicht decken, so müßten Puncte von AMB nicht in übereinstimmende Puncte von ANB fallen. Da nun aber alle Puncte in AMB vom Mittelpuncte C so weit entfernt sind, als alle Puncte in ANB, so muß jeder Punct in AMB auf einen zugehörigen Punct in ANB fallen d. h. der ganze Bogen AMB muß in den ganzen Bogen ANB fallen. Folglich liegt der Theil der Kreisfläche AMB dergestalt in dem Theile ANB, daß beide rings umher alle Grenzen gemein haben und nur eine einzige Figur bilden. Daher ist die Kreisfläche und die Kreislinie von dem Durchmesser halbirt.

XIV. Zur 19. Erklär. Man nennt jede gerade Linie im Kreise, welche die Peripherie desselben beiderseits trifft, ohne durch dessen Mittelpunct zu gehen, eine Sehne oder Chorde des Kreises. Hieraus ist klar, daß jede Sehne zwei Abschnitte in ihrem Kreise bildet, wovon der eine der größere, der andere der kleinere Abschnitt genennt wird. Geht die Sehne durch den Mittelpunct, so heißt sie Durchmesser und jeder ihrer zwei gleichen Abschnitte ist nun ein Halbkreis.

XV. Zur 20. — 23. Erklär. a) Sollen die hier gegebenen Erklärungen nicht bloße Worterklärungen seyn, so muß die Entstehung dieser Figuren im Allgemeinen nachgewiesen werden, was leicht geschehen kann.

Wenn man in jedem der beiden Schenkel eines ebenen geradlinigen Winkels einen willkührlichen Punct nimmt und beide durch eine gerade Linie verbindet, so entsteht eine dreiseitige Figur oder ein Dreieck, woran man drei Seiten, drei Winkel und die eingeschlossene Fläche erkennt.

b) Nimmt man einen willkührlichen Punct innerhalb der Ebene des Dreiecks und zieht von irgend zwei seiner Scheitelpuncte zwei gerade Linien nach ihm, so entsteht eine vierseitige Figur oder ein Viereck, welches auch dadurch gebildet werden kann, daß man die zwei Schenkel eines Winkels über die dritte Dreiecksseite verlängert, zwischen diesen Verlängerungen einen beliebigen Punct nimmt und aus ihm nach jedem Endpuncte dieser dritten Seite eine gerade Linie zieht.

Bei jedem Vierecke betrachtet man seine vier Seiten, seine vier Winkel und seine Fläche.

Wie nun auf ähnliche Art geradlinige Fünfecke, Sechsecke, Siebenecke und überhaupt geradlinige Vielecke entstehen, ist von selbst klar.

c) Eine nützliche Uebung hierbei ist es, das Gesetz für die Menge der in diesen Vielecken möglichen Diagonalen zu finden, welche entweder; aus einem, oder aus allen ihren Winkelpuncten gezogen werden; auch die Zahl der hierdurch entstehenden Dreiecke zu bestimmen u. s. w. Man sehe hierüber meine geometrische Anschauungslehre. Dritte Auflage, 1823.

XVI. Zur 24., 25. u. 26. Erklär. Diese Erklärung vom gleichseitigen Dreiecke ist hier eine Worterklärung, da sie die wirkliche Construction desselben voraussetzt, welche Euclides sogleich im 1. Satze des I. Buches nachweiset.

Die Entstehung des gleichschenkeligen Dreiecks kann hier schon befriedigend nachgewiesen werden. Man bilde einen ebenen geradlinigen Winkel, nehme in dessen einem Schenkel einen willkührlichen Punct, beschreibe aus dem Scheitel mit diesem Stücke des Schenkels einen Kreis, welcher den andern Schenkel schneidet und verbinde die beiden Puncte in den Schenkeln durch eine gerade Linie, so hat das hierdurch entstandene Dreieck zwei gleiche Seiten und ist somit ein gleichschenkeliges. Diese dritte Seite, welche die gleichen Schenkel miteinander verbindet, heißt die Grundlinie und der ihr gegenüber liegende Scheitel die Spitze des gleichschenkeligen Dreiecks.

Die Entstehung eines Dreiecks aus drei, unter sich ungleichen Seiten kann ebenfalls erst in der eigentlichen Geometrie befriedigend nachgewiesen werden.

XVII. Zur 27. 28. u. 29. Erklär. Diese Erklärungen sind sämmtlich Worterklärungen, da die Construction dieser Dreiecke theils von der Bildung des rechten Winkels und theils von dem Beweise abhängt, daß in jedem Dreiecke nur ein rechter Winkel oder nur ein stumpfer Winkel seyn kann, was erst in der Folge gezeigt wird.

XVIII. Zur 30. — 33. Erklär. Diese vier Erklärungen, sind ebenfalls bloße Worterklärungen, da die Entstehung des Quadrats, Rechtecks, der Raute und Rhomboide erst durch die wissenschaftlichen Sätze der Geometrie nachgewiesen werden muß. Vor allem gehört hierzu die Lehre von den Parallellinien mit ihren Folgerungen. Auch kann dann erst der diesen vier Figuren gemeinschaftliche höhere Begriff des Paralelogramms begründet werden, worunter man ein vierseitige Figur versteht, worin je zwei einander gegenüberliegende Seiten mit einander parallel sind. Eine Folge dieses Parallelismus ist es sodann, daß auch diese Seiten einander gleich und eben so auch die sich gegenüberliegenden Winkel einander gleich seyn müssen. Auch muß die Geometrie beweisen, daß es nur vier besondere Arten von Parallelogrammen geben kann.

XIX. Zur 34. Erklär. Gewöhnlich pflegt man, und dieses mit Recht, zweierlei Arten von Trapezen zu unterscheiden, nämlich die Paralleltrapeze und die gewöhnlichen Trapeze. Unter jenen versteht man solche Vierecke, in welchen zwei sich gegenüberstehende Seiten mit einander parallel, die beiden andern aber es nicht sind. Bei diesen aber ist keine Seite mit der ihr entgegen liegenden gleichlaufend. Hieraus geht hervor, daß die Paralleltrapeze ebenfalls nur durch Hülfe der Parallelenlehre construirt werden können. Die andere Art von Trapezen werden auch bisweilen Trapezoiden genennt.

XX. Zur 35. Erklär. Soll diese Erklärung der Parallellinien für die geometrische Wissenschaft brauchbar seyn, so muß die wirkliche Entstehung solcher Linien überzeugend nachgewiesen werden. Daher ist sie hier ebenfalls nur eine Worterklärung.

Wenn Andere zwei gerade, in einerlei Ebene liegende Linien dann parallel nennen, wenn sie in allen ihren Puncten immer den nämlichen Abstand von einander haben, so ist diese Erklärung ebenfalls von der Art, daß die Entstehung der Parallelen in diesem Sinne erst nachgewiesen werden muß. Von der, in der Geometrie so sehr berüchtigten Parallelenlehre wird weiter unten etwas ausführlicher gehandelt werden.

XXI. Zur Forder. 1. 2. u. 3. Diese Forderungen enthalten eigentlich einige Grund-Aufgaben zur Geometrie, deren Auflösungen höchst einfach sind und weder einer besondern Weisung, noch eines Beweises bedürfen. Sie ergeben sich aus dem, was Oben (I, i. u. f.) bemerkt worden ist.

Die erste Forderung wird erfüllt, wenn man sich vorstellt, der eine Punct bewege sich in unveränderter Richtung nach dem andern hin.

Der zweiten wird entsprochen, wenn der Punct, welcher die gegebene gerade Linie erzeugt hat, sich, mit Beibehaltung seiner Richtung, über jeden Endpunct dieser Linie hinausbewegt.

Die dritte Forderung beruht auf dem, was oben (XI.) über die Entstehung des Kreises bemerkt worden ist.

XXII. Zu Grundsatz 1—7. Grundsätze sind solche Behauptungen, welche, ihrer Einfachheit wegen, keines Beweises bedürfen. Ihre Wahrheit leuchtet Jedem von selbst ein, sobald er nur ihren Sinn versteht. Sie sind von vielfacher Anwendung in den geometrischen Beweisen. Die ersten sieben Grundsätze des Euclides beziehen sich nicht bloß auf Raumgrößen, sondern gelten von Größen überhaupt. Sie lassen sich in folgenden allgemeinen arithmetischen Formen darstellen.

1. Grundsatz. Wenn $A = B$ und $A = C$ ist,

so ist auch $B = C$.

Dieser Grundsatz wird richtiger so ausgedrückt: Wenn jede von zwei Größen der nämlichen dritten Größe gleich ist, so sind auch jene zwei Größen einander unter sich gleich.

2. Grundsatz. Wenn $A = B$ und $C = D$ ist,

so ist auch $A + C = B + D$.

Wäre noch $E = F$, so müßte auch $A + C + E = B + D + F$ seyn, u. s. w.

3. Grundsatz. Wenn $A = B$ und $C = D$, so

ist auch $A - C = B - D$.

4. Grundsatz. Es sei $A = B$, aber
$C > D$, so ist
auch $A + C > B + D$

Es sei $A = B$ und
$C < D$, so ist
auch $A + C < B + D$.

5. Grundsatz. Es sei $A = B$ und
$C > D$, so ist
auch $A - C < B - D$

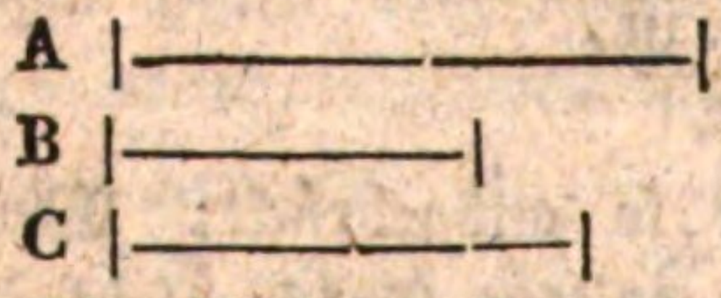
Es sei $A = B$ und
$C < D$, so ist
auch $A - C > B - D$.

Wäre $A > B$ und
auch $B > C$, so müßte
auch $A > C$ seyn.

Wäre $A < B$ und
$B < C$, so müßte
auch $A < C$ seyn.

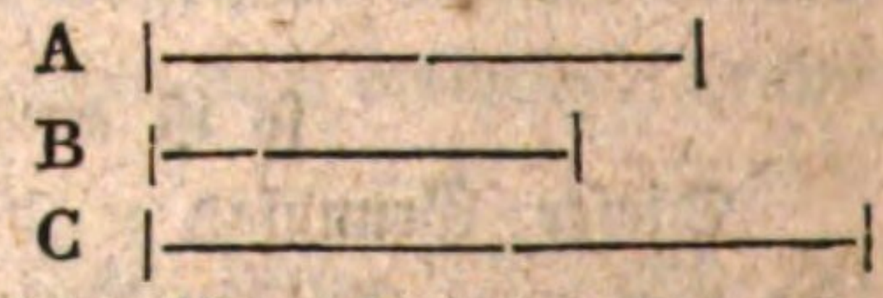
Allein aus $A > B$ und
$B < C$, folgt weder
$A > C$ noch auch
$A < C$, wie folgende Darstellung lehrt.

1.



Hier ist $A > B$
$B < C$, und
$A > C$

2.



Hier ist auch $A > B$
und $B < C$,
aber $A < C$

6. Grundsatz. Wenn $A = B$, so ist
auch $2A = 2B$

7. Grundsatz. Wenn $A = B$, so ist
auch $\frac{1}{2} A = \frac{1}{2} B$

Ferner merke man noch

Wenn A = B, so ist nicht nur

2A = 2B, sondern auch

3A = 3B und allgemein

⋮ ⋮

nA = nB.

Oder wenn A = B, so ist nicht allein

$\frac{1}{2}$ A = $\frac{1}{2}$ B, sondern auch

$\frac{1}{3}$ A = $\frac{1}{3}$ B und allgemein

⋮ ⋮

$\frac{1}{n}$ A = $\frac{1}{n}$ B.

XXIII. Zum 8. Grundsatz. Dieser Grundsatz, welcher lediglich von Raumgrößen gilt, ist sehr wichtig zur evidenten Darstellung der Geometrie und bedarf hier einiger Erläuterungen.

a) Im Allgemeinen sagt man, daß sich zwei Raumgrößen decken oder einander congruent sind, wenn sie dergestalt können in einander gebracht werden, daß sie nur eine einzige im Raume bilden, und es ist klar, daß beide dann durchaus nicht mehr von einander können unterschieden werden, sondern völlig einerlei sind.

b) Wenn (Fig. 224.) die gerade Linie AB dergestalt in die gerade Linie CD gelegt werden kann, daß der Punct A in den Punct C, die AB längs der CD und nun auch der Punct B in den Punct D fällt, so sagt man, beide Linien decken einander und bilden nur eine einzige gerade CD.

c) Da nämlich diese geometrischen Linien nur Länge, und weder Breite noch Dicke haben, so befinden sich beide hier in einem und demselben Raume und können daher nicht als zwei Linien erkannt werden.

Wenn daher die gerade Linie GH so in die gerade Linie EF gebracht wird, daß der Punct G in E, die Linie GH längs der Linie EF liegt und der Punct H nunmehr nicht in den Endpunct F, sondern in J fällt, so wird GH nur einen Theil von

EF, nämlich den Theil EJ decken und es muß GH kleiner als EF, oder EF größer als GH seyn.

d) Hieraus sind nun folgende Sätze klar:

1. Wenn gerade Linien einander decken, so sind sie auch einander gleich;
2. Wenn gerade Linien einander gleich sind, so können sie so in einander gelegt werden, daß sie sich decken.
3. Wenn gerade Linien einen Endpunct gemein haben, und eine nur einen Theil der andern deckt, so sind sie ungleich; jene, welche nur einen Theil der andern deckt, ist die kleinere, und jene, von welcher nur ein Theil gedeckt wird, die größere.
4. Wenn gerade Linien einander ungleich sind, so können sie dergestalt in einander gelegt werden, daß eine einen Theil der andern deckt.

e) Da man sich zwischen zwei bestimmten Puncten im Raume nur eine einzige gerade Linie denken kann, wie dieses aus der unmittelbaren Anschauung des Geraden hervorgeht, so müssen alle gerade Linien, welche ihre Endpuncte miteinander gemein haben, auch einander decken, folglich unter sich gleich seyn. Auf diesem Grundsatze der reinen Geometrie beruht der practische Gebrauch des Cirkels, um eine (etwa mit Bleistift auf dem Papiere gezogene, als Sinnbild der geometrischen dienende) Linie so groß als eine andere zu machen, oder von einer größern einen Theil abzuschneiden u. s. w. Denn zwischen den zwei Spitzen der Cirkelfüße kann nur eine gerade Linie gedacht werden.

f) Auch darf dieses, aus dem Decken gerader Linien hervorgehende Ineinanderfallen nicht, wie es gewöhnlich zu geschehen pflegt, ein Aufeinanderfallen derselben genennt werden. Dächte man sich z. B. zwei gleichlange, gleichgestaltete, vierkantige Stäbchen von Holz, so könnte wohl das eine, nach seiner ganzen Länge, auf das andere gelegt werden. Aber ein gänzliches Ineinanderfallen ist hier unmöglich, da jedes, als physischer Körper, das Eindringen des andern in

seinen Raum verhindert. Dieses Hinderniß hat bei geometrischen, bloß gedachten Linien nicht Statt, daher beide, als in dem nämlichen Raume enthalten, angenommen werden können.

g) Dieser Begriff des Deckens muß auch auf die ebenen geradlinigen Winkel angewendet werden. Es seien (Fig. 225.) ABC und DEF zwei gegebene Winkel. Man denke sich den Schenkel BC so in den Schenkel EF gelegt, daß der Punct B in E und BC längs EF, auch die Ebene des Winkels CBA in die Ebene des Winkels FED fällt, so wird der Schenkel BA entweder längs des Schenkels ED, oder unterhalb ED, etwa in EG, oder oberhalb ED, etwa in EH fallen. Im ersten Falle werden die Winkel ABC und DEF einander decken, nur einen einzigen bilden und somit auch einander gleich seyn. Im zweiten Falle wird der Winkel GEF nur einen Theil des Winkels DEF decken und es muß der Winkel GEF, und folglich auch der ihm gleiche Winkel ABC, kleiner als der Winkel DEF seyn. Im dritten Falle wäre, auf ähnliche Art, der Winkel HEF und folglich auch der Winkel ABC größer als der Winkel DEF.

Hieraus folgt: 1) Wenn Winkel einander decken, so sind sie einander gleich;

2) Wenn Winkel einander gleich sind, so können sie so ineinander gelegt werden, daß sie sich decken;

3) Dieses Decken der Winkel kann ohne das Decken ihrer Schenkel Statt finden, weil die Größe eines Winkels nicht von der Länge seiner Schenkel abhängt.

h) Auf ähnliche Art findet dieses Decken bei Figuren Statt. Wenn (Fig. 226.) jeder der beiden Kreise AMDN und EPGQ mit dem nämlichen Halbmesser CA = FE beschrieben ist, so können beide so in einander gelegt werden, daß sie sich decken. Denn wenn man sich den Mittelpunct C in den Mittelpunct F und die Ebene des ersten Kreises in jene des zweiten fallend vorstellt, so müssen alle Puncte der Peripherie des ersten in entsprechende Puncte der Peripherie des zweiten fallen, weil jeder dieser Puncte vom Mittelpuncte F den nämlichen Abstand hat. Daher liegen beide Kreise so ineinander, daß sie nur

einen einzigen bilden d. h. sie decken sich. Es gelten hierbei auch die nämlichen Grundsätze: Figuren, welche sich decken, sind einander gleich an Gestalt und an Größe, und wenn Figuren Größe und Gestalt gemeinschaftlich haben, so können sie so in einander gelegt werden, daß sie sich decken, und somit nur eine einzige bilden.

i) Auch Körper decken einander, wenn sie dergestalt in einander können gestellt werden, daß beide nur einen einzigen bilden. Wenn man sich den Durchmesser AD (Fig. 226.) als unbeweglich denkt und nun annimmt, der Halbkreis AMD drehe sich um enselben einmal ganz und gar herum, so beschreibt derselbe den körperlichen Raum einer Kugel. Der halbe Umfang AMD beschreibt nämlich eine allseitig gekrümmte Fläche, worin jeder Punct vom Mittelpuncte C gleiche Entfernung hat. Man nennt sie die Kugelfläche und was sie einschließet ist der körperliche Raum der Kugel. Wenn sich nun der Halbkreis EPG, welcher dem Halbkreise AMD congruent ist, auf gleiche Art um seinen Durchmesser EG ganz und gar herumdrehet, so beschreibt er ebenfalls eine Kugel und, wenn beide Kugeln mit ihren Mittelpuncten in einander gebracht werden, so ist klar, daß sie genau in dem nämlichen Raume enthalten sind d. h. daß sie sich einander decken.

Hieraus folgt, daß Körper welche sich decken, sowohl an Größe, als an Gestalt übereinstimmen; so wie auch umgekehrt solche Körper, welche einerlei Gestalt und Größe haben, so in einander gelegt werden können, daß sie sich decken.

Von der bloßen Gleichheit, so wie von der Aehnlichkeit der Raumgrößen wird weiter unten das Nöthige bemerkt werden.

XXIV. Zum 9. Grundsatz. Der allgemeine oder arithmetische Ausdruck dieses Grundsatzes ist folgender:

Wenn $A = B + C + D + E + F$, so ist $A > B$; $A > C$; $A > D$; $A > E$; $A > F$.

Noch kann man beifügen: das Ganze ist größer als einige seiner Theile zusammengenommen. Aus dem Obigen ist

$$A > B + C + D + E;$$

$$A > B + C + D;$$
$$A > B + E + F \text{ u. s. w.}$$

Durch die Anschauung kann dieser Grundsatz ebenfalls erläutert werden. Da (Fig. 224.) $EJ + JF = EF$, so kann hier die Linie EF als das Ganze und EJ, JF können als dessen Theile angesehen werden. Es ist also $EF > EJ$ und $EF > JF$.

Eben so besteht der Winkel HEF (Fig. 225.) aus den drei Winkeln HED, DEG und GEF und es ist Winkel HEF > Winkel HED, oder auch Winkel HEF > Winkel HEG u. s. w.

XXV. Zum 10. Grundsatz. Wenn man unter dem rechten Winkel jenen versteht, welcher seinem Nebenwinkel gleich ist (VII.) so kann dieser Grundsatz als Lehrsatz bewiesen werden.

Wenn (Fig. 227.) FG auf MN lothrecht steht, so ist jeder der zwei Winkel FGM und FGN ein rechter. Eben so ist, wenn der Winkel ACB dem Winkel ACD gleich ist, jeder von beiden ein rechter (Eucl. 10. Erklär.) und es ist zu zeigen, daß auch die Winkel FGN und ACD einander gleich sind.

Man lege die gerade MN so in BD, daß der Punct G in C fällt und daß GF auf der nämlichen Seite von BD liegt, auf welcher sich auch CA befindet. Wenn nun die Linie GF in CA fällt, so sind die Winkel FGN und ACD einander gleich. Fiele aber die GF nach CE, so müßten auch die Winkel ECD und ECB einander gleich seyn, nach der Annahme. Es wäre also

$$\measuredangle ECD = \measuredangle ECB, \text{ allein}$$

da $\measuredangle ECD < \measuredangle ACD$, so wäre

auch $\measuredangle ECB < \measuredangle ACD$. Es ist aber

$$\measuredangle ACD = \measuredangle ACB, \text{ folglich}$$

müßte $\measuredangle ECB < \measuredangle ACB$ seyn,

welches widersprechend ist, weil

$$\measuredangle ECB > \measuredangle ACB$$

seyn muß.

Es ist übrigens klar, daß bei diesem Beweise die Construction des rechten Winkels vorausgesetzt wird, welche erst durch die Sätze der Geometrie begründet werden kann.

XXVI. Zum 11. Grundsatz. Dieses ist das, in der Geschichte der Geometrie so sehr berüchtigte eilfte Axiom

des Euclides. Sein Sinn ist folgender. Wenn (Fig. 228.) auf der Linie AB in den beiden willkührlichen Puncten C und D die senkrechten Linien CE und DF errichtet sind, so ist sowohl der Winkel ECD als auch der Winkel FDC ein rechter. Man nennt sie die beiden innern Winkel, welche hier, da jeder ein rechter ist, zusammen genommen zwei rechte Winkel betragen. Wird nun die gerade Linie CG so gezogen, daß der Winkel GCD kleiner als der Winkel ECD ist, so betragen nun die beiden innern Winkel GCD und FDC zusammen genommen weniger als zwei rechte, und der 11. Grundsatz behauptet, daß die Linien CG und DF, wenn sie über G und F hinlänglich verlängert werden, einmal zusammentreffen müssen.

Hieraus ist nun klar:

a) Daß dieser Grundsatz die Construction des rechten Winkels voraussetzt, weil der spitze Winkel nur durch den rechten gebildet werden kann, da er kleiner als dieser ist. Ehe also die Entstehung des rechten Winkels nachgewiesen ist, kann die Hypothesis dieses Grundsatzes, daß die zwei innern Winkel zusammen kleiner als zwei rechte sind, nicht einmal als geometrisch begründet angesehen werden.

b) Setzte man aber auch diese Bedingniß als vorhanden zum voraus, so ist die Behauptung des einmal nothwendig erfolgenden Durchschnitts der verlängerten Linien nicht so einleuchtend, daß sie ohne allen Beweis als wahr angenommen werden dürfte. Daher ist dieser Euclidische Satz kein eigentliches Axiom, sondern ein Lehrsatz, der eines Beweises bedarf.

c) Wollte man Etwas zur Annahme dieser Behauptung als Grundsatz bemerken, und seine Stelle vor der eigentlichen geometrischen Wissenschaft rechtfertigen, so könnte Folgendes angeführt werden.

Wenn CE (Fig. 228.) und DF zwei Lothe auf AB sind, so lehrt die unmittelbare Anschauung, daß dieselbe weder eine Neigung gegen einander, noch eine solche von einander haben und somit als zwei gerade Linien zu betrachten sind, welche unter sich keine Neigung besitzen. Wird nun

zwischen CE und DF aus C eine willkührliche Linie CG (oder aus D eine ähnlich liegende) gezogen, so lehrt wieder die Anschauung, daß diese CG eine Neigung gegen DF habe, vermöge welcher sie, über G verlängert, der DF und ihrer Verlängerung, immer näher rücken und dieselbe einmal erreichen wird.

d) Hätte Euclides (oder, wie Einige glauben, ein Anderer, welcher diesen Satz unter dessen Grundsätze aufgenommen hat) diese oder eine ähnliche Erläuterung hierüber gegeben, so wäre er vielleicht um so weniger anstößig gewesen, als in den Elementen vor der eigentlichen Parallelenlehre streng nachgewiesen wird, wie man Lothe errichten soll, und daß zwei Linien CE und DF, wenn $\sphericalangle ECD + \sphericalangle FDC = 2\,R$ (wo R einen rechten Winkel bedeutet) ist, wenn sie auch noch so weit über E und F verlängert werden, sich niemals durchschneiden können. Mehreres davon wird weiter unten vorkommen.

XXVII. Zum 12. Grundsatz. Dieser Grundsatz steht mit dem oben (XXIII, e.) Bemerkten in der engsten Verbindung. Denn wenn zwischen zwei gegebenen Puncten nur eine gerade Linie möglich ist, so können auch zwei gerade Linien keinen Raum einschließen. Beide Sätze fließen aus der unmittelbaren Anschauung der geraden Linien und bedürfen keiner besonderen Beweise, deren sie auch nicht fähig sind.

XXVIII. Zum 1. Satze. a) Diese Aufgabe ist mit aller Strenge dargestellt, wenn man die Nothwendigkeit des Durchschnittspuncts beider Kreise erkennt, welche Euclides nicht nachgewiesen hat.

Daher bemerke man Folgendes. Wenn AB (Fig. 229.) die gegebene Linie ist, so verlängere man sie willkührlich über A nach F und über B nach G, beschreibe aus A mit AB den Halbkreis BCD und aus B mit BA den Halbkreis BCE, so ist BD ein Durchmesser des Kreises um A und AE ein Durchmesser des Kreises um B.

Da nun $AE > AB$ ist, so liegt der Punct E ausserhalb des Kreises um A (XIII.). Allein A liegt innerhalb dieses

Kreises; daher muß die krumme Linie ACE, welche einen Punct innerhalb des Kreises um A mit einem Puncte ausserhalb desselben verbindet, den Kreis um A nothwendig schneiden.

Eben so kann auch gezeigt werden, daß, weil B innerhalb des Kreises um B und D ausserhalb dieses Kreises liegt, auch die krumme Linie BCD den Kreis um B schneiden muß.

b) Da nun eben diese Construction auch auf der anderen Seite der Linie FG ausgeführt werden kann, so gibt es auch hier noch einen zweiten Durchschnittspunct H und folglich auch ein zweites gleichseitiges Dreieck AHB.

Daß sich die beiden Halbkreise DCB und ACE nur in einem Puncte C und die zwei Halbkreise DHB und AHE nur in einem Puncte H durchschneiden können, wird weiter unten bewiesen.

XXIX. Zum 2. Satze. a) Es mögte scheinen, als sei diese Aufgabe deßhalb entbehrlich, weil man nur durch A eine willkührliche gerade Linie AE ziehen und aus A mit AL = BC einen Kreis beschreiben dürfe, welcher diese AE in L schneidet. Allein Euclides wollte eben zeigen, wie man durch eine streng geometrische Construction jene Linie finden kann, welche einer in derselbigen Ebene gegebenen geraden Linie gleich ist. Allerdings kann man sich denken, daß auf einer unbestimmten geraden Linie ein Stück genommen werde, welches einer gegebenen bestimmten Linie gleich ist. Allein hierdurch ist die wirkliche Construction dieser Linie noch nicht befriedigend nachgewiesen. Daß man die gegebene Linie nicht mit dem Cirkel auf die willkührlich gezogene tragen dürfe, versteht sich von selbst, da dieses practische Instrument (obwohl es auf theoretischem Grunde beruht) nicht in die theoretische Geometrie gehört.

b) Man bemerke, daß der gegebene Punct A, in Bezug auf die ebenfalls gegebene gerade Linie BC, eine dreifach verschiedene Lage haben kann, indem er sich entweder in der Linie BC selbst, oder in ihrer Verlängerung über B oder C, oder endlich (wie bei Euclides) ausserhalb der BC befindet. Auflösung und Beweis sind sich immer ähnlich und

es ist zweckmäßig, die übrigen Lagen durch Zeichnungen zu erläutern.

Sollte der gegebene Punct in B oder in C selbst liegen, so dürfte nur aus B mit BC oder aus C mit CB ein Kreis beschrieben und irgend ein Halbmesser in demselben gezogen werden.

c) Wenn die zu findende Linie 2, 3, 4...nmal größer als die gegebene werden soll, so verlängere man DE unbestimmt, beschreibe aus L mit LA einen Kreis, welcher sie schneidet. Hieße dieser Durchschnittspunct M, so wäre AM = 2 BC. Beschriebe man nun aus M mit ML einen neuen Durchschnittspunct N, so wäre AN = 3 BC u. s. w.

XXX. Zum 3. Satze. Da die Hypothesis dieses Satzes in der Annahme zweier ungleichen geraden Linien besteht, so kann man fragen, wie werden zwei ungleiche gerade Linien construirt, oder wodurch weiß man, daß von zwei gegebenen geraden Linien die eine größer als die andere ist? — Die Beantwortung liegt als Folge in dem 2. Satze. Denn wenn man eine gerade Linie bilden kann, welche einer andern gleich ist, so darf die eine nur verlängert werden, um eine dritte zu erhalten, welche größer als die erste ist.

XXXI. Zum 4. Satze. a) Dieser Lehrsatz kann auch so ausgesprochen werden: zwei Seiten und der von ihnen eingeschlossene Winkel bestimmen die Natur eines Dreiecks d. h. wenn diese drei Stücke eine bestimmte Größe haben, so ist auch die dritte Seite des Dreiecks, jeder seiner zwei andern Winkel und sein Flächenraum bestimmt.

b) Wenn man hier die Frage stellt: wie kann ein Winkel BAC gebildet werden, welcher dem gegebenen Winkel EDF gleich ist? so hat zwar Euclides diese Aufgabe hier noch nicht aufgelöset und insofern ist die Hypothesis dieses Lehrsatzes noch nicht streng geometrisch begründet. Da man indessen sehr wohl die Möglichkeit erkennt, daß ein Winkel einem gegebenen gleich seyn kann, so kann dieselbe hier schon vorausgesetzt werden.

Für Jene aber, welche dieses dennoch für einen kleinen Fehler gegen die wissenschaftliche Methode halten, theilen wir folgende Begründung dieser Hypothesis mit.

c) Es sei (Fig. 230.) ACB irgend ein Winkel. Man nehme auf seinem Schenkel CA die willkührlichen Puncte D und F, mache CE = CD und CG = CF, und ziehe die Verbindungslinien DG und EF, so entstehen zwei Dreiecke CDG und CEF, welche zwei Seiten nebst den von ihnen eingeschlossenen Winkel, einzeln genommen, mit einander gemein haben und somit der Bedingniß des Lehrsatzes entsprechen.

d) Ueberhaupt ist es zweckmäßig, bei jedem Lehrsatze und bei jeder Aufgabe die Hypothesis von der Thesis zu unterscheiden. Jene ist bei dem Lehrsatze die Bedingniß, worunter etwas behauptet; bei der Aufgabe aber die Bedingniß, worunter etwas gefordert wird. Die Thesis ist im ersten Falle das, was behauptet, im zweiten Falle das, was gefordert wird.

e) Wenn Euclides in dem Beweise dieses Satzes von dem Aufeinanderfallen der gleichen Linien und Winkel spricht und dieser Ausdrücke sich in der Folge sehr häufig bedienet, so müssen wir hierbei wiederholen, was bereits oben (XXIII.) gesagt worden ist. Es hat nämlich bei diesen, unter sich gleichen Raumgrößen kein Aufeinanderfallen, sondern ein gänzliches Ineinanderfallen statt; so, daß sie als in demselbigen Raume enthalten gedacht werden, wodurch sie als vollkommen einerlei erscheinen. Durch diese, der Sache sehr genau entsprechende Vorstellungsweise wird auch der Einwurf beseitigt, welchen Mehrere der Euclidischen Beweisart dadurch gemacht haben, als bestehe sie in einem bloß mechanischen Aufeinanderpassen der Linien, Winkel und Figuren.

f) Man könnte diesen Satz auch folgendergestalt beweisen, ohne sich des Ineinanderfallens der gleichen Theile beider Dreiecke zu bedienen. Wenn DCG (Fig. 230.) ein gegebenes Dreieck ist, so verlängere man die Seite CD willkührlich nach A, CG willkührlich B, nehme CE = CG auch CF = CG und

ziehe FE, so entsteht noch ein Dreieck ECF, welches mit dem Dreiecke DCG zwei Seiten nebst dem, von ihnen eingeschlossenen Winkel, einzeln genommen, gemein hat. Da nun in der Ebene des Winkels ACB das eine Dreieck als durchaus auf dieselbige Art, wie das andere, entstanden gedacht werden kann, so müßte aus demselbigen Grunde, aus welchem z. B. DG > EF seyn sollte, auch folgen, daß EF > DG wäre, weil auf der einen Seite Alles gerade eben so, wie auf der andern ist. Da dieses aber nicht zugleich seyn kann, so ist DG = EF und eben so ∠ CDG = ∠ CEF und ∠ CGD = ∠ CFE. Folglich sind beide Dreiecke einander congruent.

g) Noch fügen wir folgenden Beweis bei, welcher nur ein einziges Dreieck voraussetzt. Wenn DCG (Fig. 231.) ein willkührlich gegebenes Dreieck ist, so verlängere man GC beliebig über B nach M und beschreibe mit CD aus C den Halbkreis ADB. Denkt man sich nun die Seiten GC und CD als unveränderlich an Größe, so kann CD nur dadurch eine andere Lage erhalten, als sie wirklich hat, daß sie entweder zwischen D und A den Bogen DA, oder zwischen D und B den Bogen DB schneidet. Hätte sie nun z. B. die Lage CE, so würde ∠ ECG < ∠ DCG, und in der Lage CF würde ∠ FCG > ∠ DCG seyn. Soll aber auch dieser Winkel DCG unveränderlich an Größe seyn, so ist dieses nur in der einzigen Lage CD möglich. Daher gibt es, wenn GC, CD und ∠ DCG eine bestimmte Größe hat, nur ein einziges Dreieck DCG, welches aus diesen Stücken möglich ist. Folglich müssen nun auch die Winkel CDG und CGD nebst der Seite DG eine bestimmte Größe haben.

h) Auch bemerke man noch bei diesem Satze, daß Euclides beide Dreiecke einander gleich nennt, welche, mit größerer Bestimmtheit, congruent oder übereinstimmend oder gleich und ähnlich genennt werden.

Congruenz ist die gänzliche Uebereinstimmung in Größe und Gestalt. (XXIII, a, i.)

Bloße Gleichheit der Figuren ist die Uebereinstimmung in der Größe bei Verschiedenheit ihrer Gestalt. So kann z. B. ein Dreieck einem Vierecke gleich seyn, wenn beide Figuren einen gleich großen Flächenraum einschließen.

Aehnlichkeit ist die Uebereinstimmung in der Gestalt bei Verschiedenheit der Größe. So sind z. B. alle Kreise einander ähnlich, wenn sie auch verschiedene Halbmesser haben. Eben so auch alle Kugeln von verschiedenen Durchmessern u. s. f.

Die wissenschaftlichen Lehren der Gleichheit und Aehnlichkeit werden weiter unten entwickelt.

XXXII. Zum 5. Satze. a) Nach dem Zeugnisse des Proclus soll Thales von Milet diesen Satz erfunden haben. Proclus selbst denkt sich das Dreieck BAC noch einmal als Dreieck bac; so, daß also AB = ab, AC = ac und ∢ A = ∢ a ist, und legt zuerst AB in ab, ∢ BAC in ∢ bac und AC in ac, wodurch nun beide Dreiecke sich decken und ∢ ABC = ∢ abc so wie auch ∢ ACB = ∢ acb ist. Dann legt Proclus die Seite AB in ac, den ∢ BAC in ∢ cab und AC in ab, wodurch sich die Dreiecke nach dem vierten Satze abermals decken und nun ∢ ABC = ∢ acb, ferner ∢ ACB = ∢ abc ist. Daher muß nun auch ∢ abc = ∢ acb und folglich auch ∢ ABC = ∢ ACB seyn.

b) Auch könnte man hier so sagen. Sollte in dem gleichschenkeligen Dreiecke BAC der Winkel ABC dem Winkel ACB nicht gleich seyn, so müßte ∢ ABC > ∢ ACB oder ∢ ABC < ∢ ACB seyn. Wäre nun z. B. ∢ ABC > ∢ ACB, so müßte, weil alles auf der Seite AB gerade so ist, wie auf der Seite AC, auch ∢ ACB > ∢ ABC seyn. Beides zugleich ist aber widersprechend. Daher können die Winkel ABC und ACB einander nicht ungleich seyn; folglich ist ∢ ABC = ∢ ACB.

c) Denkt man sich unter ABC ein gleichseitiges Dreieck, so ist, wegen AB = AC, nun auch ∢ ABC = ∢ ACB und, wegen BA = BC, auch ∢ BAC = ∢ BCA, folglich muß ∢ ABC = ∢ BAC = ∢ BCA seyn. Daher sind alle gleichseitige Dreiecke auch gleichwinkelige Dreiecke. Nennt man eine Figur, welche lauter gleiche Seiten nnd gleiche Winkel hat, eine regelmäßige, so ist das gleichseitige Dreieck eine regelmäßige Figur, und zwar, wie man leicht erkennt, die einfachste aller geradlinigen regelmäßigen Figuren.

XXXIII. Zum 6. Satze. a) Man sieht sogleich, daß dieser Satz der umgekehrte des fünften Satzes ist. Einen Satz umkehren heißt nämlich, seine Thesis zur Hypothesis

und seine Hypothesis zur Thesis machen. Wollte man die Frage stellen: Warum muß denn, wenn ein Lehrsatz streng bewiesen ist, nun auch seine Umkehrung noch bewiesen werden? so bemerke man, daß der streng wissenschaftliche Vertrag durchaus solche Beweise fodert, indem der umgekehrte Satz ein anderer, als der zuerst gegebene ist.

b) Beide Sätze sind daher folgende:

A. Hypothesis: Wenn man voraussetzt, daß ein Dreieck zwei gleiche Winkel hat,
Thesis: so hat es auch zwei gleiche Seiten.

B. Hypothesis: Wenn man voraussetzt, daß ein Dreieck zwei gleiche Seiten hat,
Thesis: so hat es auch zwei gleiche Winkel.

c) Bezeichnet man die Hypothesis mit H und die Thesis mit T, so ist die allgemeine Form diese:

1) Wenn H ist, so muß auch T seyn, und 2) wenn T ist, so muß auch H seyn.

Könnte im ersten Falle bewiesen werden, daß T nur unter der Bedingniß H Statt fände, dann würde man auch aus dem Vorhandenseyn von T mit aller Strenge und ohne neuen Beweis auf das Daseyn von H schließen dürfen. Hier wäre nämlich H die einzige Bedingniß, unter welcher T möglich ist. Wo also T ist, da muß nothwendig auch H seyn.

d) Wäre in einem Dreiecke ABC (welches man sich leicht vorzeichnen kann) $\measuredangle A = \measuredangle B = \measuredangle C$, so müßte, weil $\measuredangle A = \measuredangle B$ ist, auch $AC = BC$, und, weil $\measuredangle B = \measuredangle C$ ist, auch $AB = AC$ seyn. Folglich ist nun $AC = BC = AB$, d. h. wenn ein Dreieck drei gleiche Winkel hat, so muß es auch drei gleiche Seiten haben und somit ein gleichseitiges Dreieck seyn.

e) Aus diesen Sätzen erkennt man die Verbindung, welche zwischen den gleichen Winkel eines Dreiecks, in Bezug auf die ihnen gegenüberliegenden Seiten, und umgekehrt, Statt findet.

XXXIV. Zum 7. Satze. a) Dieser Satz ist eine Vorbereitung zum achten Satze, mit welchem er eigentlich ein Ganzes bildet, und beide Sätze hätten füglich in einen einzigen sollen verbunden werden. Euclides beweiset, daß zwei Dreiecke con-

gruent seyn müssen, wenn ihre drei Seiten, einzeln genommen, einander gleich sind.

b) Die Hypothesis des siebenten Satzes würde deutlicher seyn, wenn darin bemerkt wäre, daß die, der AC gleiche Linie in dem Puncte A und die, der BC gleiche Linie in dem Puncte B aufgestellt werden müsse; auch daß diese aufgestellten zwei Linien auf derselbigen Seite von AB genommen werden müssen, über welcher sich die gegebenen Linien AC und BC befinden.

c) Was nun den Beweis dieses Satzes betrifft, so hat Euclides nicht alle mögliche Lagen angegeben, welche der hypothetisch angenommene zweite Durchschnittspunct D haben könnte, sondern nur den einen Fall bewiesen, in welchem AD die BC durchschneidet, welcher denn auch mit jenem einerlei wäre, worin die BD die AC durchschnitte. Allein dieser Punct D könnte auch in AC selbst, oder in ihrer Verlängerung über C fallen. Daß dieses aber widersprechend ist, folgt sogleich daraus, weil die AD hier der AC nicht gleich seyn könnte, was gegen die Voraussetzung ist. Auf gleiche Art kann auch der Punct D nicht in BC oder in ihre Verlängerung über C fallen.

d) Aber nun könnte D (Fig. 232.) in die Fläche des Dreiecks ACB oder ausserhalb derselben in die Winkelebene fallen, welche durch die über C verlängerten AC und BC gebildet wird.

Wenn der Punct D in dem Dreiecke ACB läge, so ziehe man die Linie CD, verlängere BC nach E und BD nach F. Weil nun $AD = AC$, so ist $\measuredangle ACD = \measuredangle ADC$. Allein es ist $\measuredangle ACD < \measuredangle DCE$; folglich auch $\measuredangle ADC < \measuredangle DCE$. Aber $\measuredangle ADC > \measuredangle CDF$, daher auch, $\measuredangle CDF < \measuredangle DCE$ Allein, weil $BC = BD$, so müßte auch $\measuredangle CDF = \measuredangle DCE$ seyn. Folglich kann der Punkt D nicht in der Ebene des Dreiecks ACB liegen.

Auf ähnliche Art wird der Beweis geführt, wenn der Punct D ausserhalb des Dreiecks ACB fallen sollte, wie man leicht finden wird.

XXXV. Zum 8. Satze. a) Wenn Euclides in diesem Satze sagt, daß, unter der Hypothesis dreier Seiten,

welche einzeln genommen, einander gleich sind, ein Winkel des einen Dreiecks einem Winkel des andern gleich sei, so ist hierdurch die Thesis nicht vollkommen erschöpft, indem die beiden Dreiecke congruent und folglich auch alle Winkel, einzeln genommen, einander gleich sind.

b) Diese Congruenz der Dreiecke kann auch auf folgende Art bewiesen werden.

Wenn die Dreiecke (Fig. 233.) ABC und DBC, worin AB = DB, AC = DC und BC = BC ist, mit zwei ihrer gleichen Seiten (hier mit BC = BC) so neben einander gelegt werden, daß ihre Spitzen A und D sich auf entgegengesetzten Seiten der BC befinden; aber B in B und C in C fällt, und nun die Verbindungslinie AD gezogen wird, so kann dieselbe nur die, in den Zeichnungen bemerkte dreifach verschiedene Lage haben.

c) Nun ist in der ersten Lage AC = DC, folglich ∠ A = ∠ D; da aber auch AB = DB ist, so muß △ BAC ≅ △ BDC seyn und folglich auch ∠ ABC = ∠ DBC; ∠ ACB = ∠ DCB.

Für die zweite Lage ist, wegen AB = DB, auch ∠ BAE = ∠ BDE und, wegen AC = DC, auch ∠ CAE = ∠ CDE; folglich muß ∠ BAC = ∠ BDC seyn. Allein es ist noch BA = BD und auch CA = CD; folglich △ BAC ≅ △ BDC.

In der dritten Lage ist, wegen AB = DB, auch ∠ BAE = ∠ BDE und wegen AC = DC, auch ∠ CAE = ∠ CDE; folglich muß auch ∠ BAC = ∠ BDC seyn. Da nun wieder BA = BD und AC = DC, so ist auch hier △ ABC ≅ △ DBC.

d) Wenn daher die drei Linien AB, BC und AC die in dem Dreiecke ABC bestimmte Größe haben, so kann aus ihnen nur das einzige Dreieck ABC gebildet werden. Werden daher aus B mit BA und aus C mit CA auf der über B und C verlängerten BC zwei Halbkreise beschrieben, so können sich diese nur in einem Puncte A durchschneiden. Da aber zwei ähnliche Halbkreise auch unterhalb der Linie BC construirt werden können, so hat hier noch ein zweites Dreieck BDC Statt, welches dem Dreiecke BAC congruent ist. Eben so könnten auch aus B und A mit BC

und AC, oder aus A und C mit AB und CB solche Halbkreise beschrieben werden, um das Dreieck ABC zu bilden.

XXXVI. Zum 9. Satze. a) Bei dieser Aufgabe hat bereits Proclus bemerkt, es müsse bewiesen werden, daß der Durchschnittspunct F innerhalb der Ebene des Winkels BAC liege. Obwohl dieses nun schon daraus hervorgeht, daß, wenn derselbe z. B. in dem Schenkel AB läge, er nun auch (weil Alles auf der einen Seite gerade so wie auf der andern ist) in dem Schenkel AC liegen müßte, was aber unmöglich ist, weil es nur einen Durchschnittspunct geben kann (XXXV, d.), so kann es auch noch streng geometrisch erwiesen werden.

b) Läge z. B. dieser Durchschnittspunct F (Fig. 234.) in dem Schenkel AC in F, so wäre ∢ DEF = ∢ EDF. Allein es ist ∢ BDE > ∢ EDF; folglich müßte auch ∢ BDE > ∢ DEF seyn, was unmöglich ist, da ∢ BDE = ∢ DEF seyn muß (I, 5.) Auf ähnliche Art wird der Beweis geführt, wenn der Punct F ausserhalb des Schenkels AC läge.

c) Man sieht, daß dieser Durchschnittspunct F auch dadurch erhalten werden könnte, daß aus D mit DF = DA und aus E mit EF = EA = AD ein Kreis beschrieben würde, wodurch unterhalb der DE ein Dreieck DFE entstände, welches dem Dreiecke DAE congruent ist.

d) Auch kann diese Aufgabe sehr einfach ohne den Durchschnittspunct zweier Kreise aufgelöset werden durch die Construction des fünften Satzes. Soll nämlich der Winkel CAB (Fig. 235.) halbirt werden, so nehme man willkührlich AD = AE, eben so AF = AG, ziehe DG und EF und aus dem Scheitel A durch den Durchschnittspunct H die gerade AHK, so ist nun ∢ CAK = ∢ BAK. Denn es ist, wenn DE gezogen wird, wegen

AD = AE, ferner
AG = AF und endlich
∢ DAG = ∢ EAF, auch
△ DAG ≅ △ EAF, daher
∢ ADG = ∢ AEF, da aber
∢ ADE = ∢ AED ist, so muß

auch ∢ EDH = ∢ DEH und folglich
DH = EH seyn. Da nun noch
AD = AE und auch
∢ ADH = ∢ AEH, so muß
△ ADH ≅ △ AEH und folglich
∢ DAH = ∢ EAH seyn.

Daher ist der Winkel CAB durch AK halbirt.

e) Da nun die Hälfte des Winkels CAB wieder auf ähnliche Art halbirt und dieses Verfahren immer fortgesetzt werden kann, so läßt sich derselbe in 2, 4, 8, 16, 32, 64 u. s. f., also überhaupt in 2^n, gleiche Theile eintheilen.

XXXVII. Zum 10. Satze. a) Die gegebene gerade Linie kann auch dadurch halbirt werden, daß auf jeder Seite von AB (Fig. 236.) ein gleichseitiges Dreieck ACB und AEB beschrieben und nun die Verbindungslinie CE gezogen wird, welche AD = DB macht. Denn da die Dreiecke CAE und CBE die drei Seiten, einzeln genommen, gemein haben, so sind sie congruent und es ist ∢ ACD = ∢ BCD. Da nun noch AC = CB und CD = CD, so muß auch △ ACD ≅ △ BCD, und daher AD = DB seyn.

b) Auf diese Art kann nun auch AB in 2, 4, 8, 16, 32, 64 u. s. f. und überhaupt in 2^n gleiche Theile getheilt werden.

XXXVIII. Zum 11. Satze. a) Durch diesen Satz wird die geometrische Construction des rechten Winkels wissenschaftlich nachgewiesen, obwohl sich durch einige frühere Constructionen schon solche Winkel ergeben hatten. So war (in Fig. 235.), wegen AD = AE, ∢ DAJ = ∢ EAJ und AJ = AJ, auch △ ADJ ≅ △ AEJ, daher ∢ AJD = ∢ AJE = R. — Eben so war (in Fig. 236.), wegen AC = BC, CD = CD und AD = BD, auch △ CDA ≅ △ CDB, folglich ∢ CDA = ∢ CDB = R.

b) Auch gibt es durch einen, in einer gegebenen Linie gegebene Punct nur eine senkrechte auf sie. Denn wenn es ausser der auf AB (Fig. 237.) lothrechten CD_1 noch eine andere senkrechte, etwa CE gäbe, so müßte ∢ ECB = ∢ ECA = R seyn. Allein es war auch ∢ DCB = DCA = R; folglich wäre ∢ ECB = ∢ DCB und auch ∢ DCA = ∢ ECA, welches beides unmöglich ist, da der Theil kleiner als das Ganze seyn muß.

c) Da nun die Construction des rechten Winkels nachgewiesen ist, so kann auch das rechtwinkelige Dreieck und das stumpfwinkelige Dreieck gebildet werden, obwohl noch nicht bewiesen ist, daß in jenem nur ein rechter und in diesem nur ein stumpfer Winkel seyn kann.

XXXIX. Zum 12. Satze. a) Der Beweis dieses Satzes setzt voraus, daß die gegebene Linie AB von dem aus C beschriebenen Kreise in zwei Puncten G und E geschnitten werde, was Euclides nicht besonders nachgewiesen hat.

Da sich die Puncte C und D auf entgegengesetzten Seiten der Linie AB befinden, so muß CD die AB in J schneiden. Da nun CJ < CD, so muß der Punct J, und folglich auch ein Theil der durch J gehenden Linie AB, sich innerhalb des Kreises befinden. Eine gerade Linie aber, von welcher ein Theil im Kreise liegt, muß, gehörig verlängert, dessen Umfang in zwei Puncten durchschneiden.

Anstatt die GE in H zu halbiren, könnte auch das Dreieck GCE unterhalb der GE gelegt und die Verbindungslinie durch die zwei Spitzen gezogen werden.

b) Wir geben von dieser Aufgabe noch folgende Auflösung. Um auf AB (Fig. 238.) aus C das Loth CG zu ziehen, ziehe man aus C zwei beliebige gerade Linien CD und CE nach AB, so entsteht das Dreieck CED. Legt man dasselbe unterhalb AB als Dreieck EFD und ziehet CF, so ist diese in G auf AB lothrecht. Denn da EC = EF, ED = ED und DC = DF ist, so ist auch △ CED ≅ △ FED, folglich ∢ CEG = ∢ FEG. Es ist aber noch EC = EF, EG = EG, folglich △ CEG ≅ △ FEG und ∢ CGE = ∢ FGE = R.

Wenn eine der beiden Linien CE und CD zwischen G und B fällt, so hat ein ähnlicher Beweis Statt.

XL. Zum 13. Satze. a) Wenn daher von zwei Nebenwinkeln einer ein rechter ist, so muß es auch der andere seyn; ist einer ein spitzer, so muß sein Nebenwinkel ein stumpfer seyn, und wenn einer ein stumpfer ist, so ist sein Nebenwinkel ein spitzer. Auch muß einer der beiden schiefen Winkel in diesem Falle um so viel kleiner als der rechte seyn, um wieviel der andere größer, als der rechte ist.

b) Auch müssen alle auf einer Seite einer geraden Linie liegende, aus einem Puncte ausgehende gerade Linien nebeneinander liegende Winkel bilden, welche zusammen zwei rechte betragen. So ist (Fig. 239.) ∠ ACD + ∠ DCE + ∠ ECF + ∠ FCB = 2 R. Denn wenn in C auf AB das Loth CG errichtet wird, so ist ∠ DCA + ∠ ECD + ∠ GCE = R und ∠ GCF + ∠ FCB = R folglich ∠ DCA + ∠ ECD + ∠ GCE + GCF + ∠ FCB = 2 R. Allein ∠ ECF = ∠ GCE + ∠ GCF.

c) Auf gleiche Art sind alle um den Punct C (Fig. 240.) liegende Winkel, nämlich ACB, BCD, DCE, ECF, FCG und GCA zusammen vier rechte Winkel.

XLI. Zum 14. Satze. a) Dieser Satz ist der umgekehrte des 13. Satzes und muß besonders bewiesen werden. Etwas faßlicher würde es im Anfange des Beweises so heissen: «Wenn CBD keine gerade Linie ist, so muß sie eine Winkellinie «seyn und die über B verlängerte CB muß entweder über BD «oder unter BD fallen.» Für jenen Fall hat Euclides den Beweis ausgeführt. Dieser Fall wird auf ähnliche Art bewiesen.

b) Nun kann auch gezeigt werden, daß es von einem ausserhalb einer gegebenen geraden Linie gegebenen Puncte nur ein Loth auf dieselbe gibt.

Es sei (Fig. 238.) die CG auf AB lothrecht, so gibt es ausser ihr kein anderes Loth mehr auf die AB. Wäre z. B. CD dieses zweite Loth, so müßte auch FD ein solches seyn und es wäre ∠ CDE = ∠ FDE = R. Daher würden diese Winkel zwei Nebenwinkel seyn und CDF wäre eine gerade Linie, welche mit der geraden CF einen Raum CDF einschlösse, was unmöglich ist.

XLII. Zum 15. Satze. a) Proclus bemerkt, Thales sei der erste Erfinder dieses Satzes und Euclides habe ihn zuerst für würdig gehalten, streng erwiesen zu werden.

b) Auch läßt sich folgender Satz leicht beweisen: wenn zwei gleiche Winkel AED und CEB gegeben sind und man legt sie mit ihren Scheiteln und in entgegengesetzter Lage ihrer

Schenkel so zusammen, daß DE und EC eine gerade Linie bildet, so müssen auch die zwei andern Schenkel AE und EB in einer geraden Linie AEB liegen.

c) Sind aber zwei Winkel von ungleicher Größe, so können, bei dieser Lage des ersten Schenkelpaars, die zwei andern Schenkel keine gerade Linie bilden.

XLIII. Zum 16. Satze. a) Dieser Lehrsatz ist reich an weiteren Folgerungen und deshalb einer der wichtigsten in der Geometrie.

b) Daß, wenn in der zweiten Hälfte des Beweises BC in J halbirt, AJ gezogen, JH = AJ genommen und noch die CH gezogen wird, diese CH mit der CF in einer geraden Linie HF liegt, ist zwar in der Natur der Sache gegründet, kann aber hier noch nicht streng bewiesen werden.

c) Aus diesem Satze folgt nun ebenfalls, daß von einem ausserhalb einer geraden Linie gegebenen Puncte nur ein Loth auf dieselbe möglich ist. Denn wenn (Fig. 238.) ausser dem Lothe CG noch ein zweites CD statt fände, so müßte $\measuredangle$ CDE = R = $\measuredangle$ CGD seyn, welches aber unmöglich ist, da $\measuredangle$ CDE > $\measuredangle$ CGD seyn muß.

d) Nimmt man GH = GE und zieht CH, so müssen die Dreiecke CGE und CGH einander congruent seyn (4. S.) folglich ist CH = CE. Daher gibt es auf jeder Seite von CG zwei einander gleiche, von C nach AB gehende Linien. Aber es gibt auch nur zwei solche Linien. Denn wäre z. B. CD auch = CE, so müßte $\measuredangle$ CED = $\measuredangle$ CDE seyn, welches unmöglich ist. Denn da $\measuredangle$ CGD = R, so muß $\measuredangle$ CDE > R und, weil $\measuredangle$ CDG < R, so muß auch $\measuredangle$ CED < R seyn.

e) Denkt man sich nun aus C mit CE = CH einen Kreis beschrieben, so kann dieser die gerade Linie AB nur in den beiden Puncten E und H schneiden. Denn hätte z. B. noch ein dritter Durchschnitt in J statt, so müßte auch CJ = CE seyn, weil auch CJ Halbmesser wäre. Allein es ist unmöglich, daß CJ = CE ist (d).

f) Wenn man in einem gleichschenkeligen Dreiecke ACB (Fig. 236.) die Grundlinie AB in D halbirt und CD zieht, so

ist, wegen CA = CB, CD = CD und AD = BD, auch △ CDA ≅ △ CDB und folglich CD ein Loth auf AB.

g) Wird in einem gleichschenkeligen Dreiecke ACB, die Grundlinie AB in D halbirt und aus D die DC auf AB lothrecht gezogen, so geht DC durch die Spitze C. Denn das von C auf AB gefällte Loth trifft in D ein (f) und es gibt von C auf AB nur ein Loth (c).

h) Wird der Winkel an der Spitze, ACB durch CD halbirt, so wird auch AB in D halbirt und CD steht auf AB senkrecht. Denn es ist hier △ CDA ≅ △ CDB.

i) Wenn aus C auf AB ein Loth CD gezogen wird, so macht dieses auch DA = DB und ∢ ACD = ∢ BCD (f, g).

XLIV. Zum 17. Satze. a) Daher muß im rechtwinkeligen Dreiecke jeder der zwei andern Winkel ein spitzer seyn.

b) Eben so kann das stumpfwinkelige Dreieck ausser dem stumpfen Winkel nur zwei spitze Winkel enthalten, und jedes dieser Dreiecke auch nunmehr leicht construirt werden, wodurch die früheren Erklärungen in Sacherklärungen verwandelt worden sind.

c) Ein spitzwinkelinges Dreieck muß drei spitze Winkel haben. Und es kann, in Bezug auf die Winkel, nur rechtwinkelige, stumpfwinkelige und spitzwinkelige Dreiecke geben.

d) Alle gleichseitige Dreiecke müssen spitzwinkelige seyn.

e) Die gleichschenkeligen Dreiecke können rechtwinkelige, stumpfwinkelige und spitzwinkelige seyn.

f) Eben dieses gilt von dem ungleichseitigen Dreiecke.

XLV. Zum 18. Satze. a) Wenn (Fig. 241.) AC > AB ist, so kann der Beweis auch dadurch geführt werden, daß AB über B verlängert, AD = AC gemacht und DC gezogen wird. Hier ist nun ∢ ABC > ∢ D; ferner ∢ D = ∢ ACD und ∢ ACB < ∢ ACD, folglich um so mehr ∢ ABC > ∢ ACB.

b) Wenn daher ein Dreieck drei ungleiche Seiten hat, so hat es auch drei ungleiche Winkel, und der größten, mittlern und kleinsten Seite liegt auch der größte, mittlere und kleinste Winkel gegenüber.

c) Im gleichschenkeligen Dreiecke muß der Winkel an der Spitze einem Winkel an der Grundlinie gleich, oder größer oder kleiner als ein solcher seyn, je nachdem die Grundlinie eben so groß, oder größer oder kleiner als einer seiner gleichen Schenkel ist.

d) Wenn (Fig. 238.) CG ein Loth auf AB ist und CD, CE, CJ drei schiefe Linien sind, so muß CD > CG; CE > CD und CJ > CE d. h. die schiefere muß immer die größere seyn. Denn, weil ∢ CGD = R, so ist ∢ CDG < ∢ CGD und folglich CD > CG. — Da ferner ∢ CDG < R, so ist ∢ CDE > R; folglich ∢ CED < R, daher ∢ CDE > ∢ CED und somit CE > CD u. s. f.

e) Eben so leicht wird bewiesen, daß auch die größere dieser schiefen Linien die schiefere sei. Denn wenn CE > CD, so ist ∢ CED < ∢ CDE. Allein ∢ CDG > ∢ CED; folglich CE schiefer als CD. Auch sind, beiderseits von CG gezogene, gleiche Linien gleich schief und gleich schiefe gleich groß. Denn wenn CE = CH, so muß auch ∢ CEG = ∢ CHG seyn, und wenn ∢ CEG = ∢ CHG ist, so hat man wieder CE = CH.

f) Endlich gibt es auf jeder Seite von CG nur eine Linie, welche eine bestimmte Größe (größer als CG) und nur eine, welche eine bestimmte Schiefe (kleiner als R) hat, wie man leicht selbst findet.

XLVI. Zum 19. Satze. Aus diesem Satze, welcher der umgekehrte des 18. Satzes ist, ergeben sich nun nachstehende Folgerungen.

a) Wenn ein Dreieck ungleiche Winkel hat, so muß es auch ungleiche Seiten haben und es steht dem größten, mittlern und kleinsten Winkel auch die größte, mittlere und kleinste Seite gegenüber.

b) In dem rechtwinkeligen oder stumpfwinkeligen Dreiecke steht dem rechten oder stumpfen Winkel die größte Seite gegenüber. In jenem Dreiecke heißt sie die Hypotenuse und jede der beiden andern Seiten wird Cathete genennt.

c) Die kürzeste Linie, welche von einem ausserhalb einer geraden Linie gegebenen Puncte nach ihr gezogen werden kann,

ist die lothrechte. Sie bestimmt daher die Entfernung oder den Abstand dieses Punctes von der Linie.

XLVII. Zum 20. Satze. a) Dieser Satz ist so einfach, daß er wohl in die Reihe der Grundsätze könnte aufgenommen werden, da die klare Anschauung lehrt, daß die gerade Linie zwischen zwei Puncten die kürzeste ist. Indessen bleibt es ein Streben der Geometrie als Wissenschaft, die Zahl ihrer Grundsätze möglichst zu vermindern.

b) Wir theilen noch folgenden Beweis dieses Satzes mit. Wenn (Fig. 242.) BA + AC nicht > BC wäre, so sei BA + AC = BC. Verlängert man nun BA über A, macht AD = AC und zieht DC, so ist ∢ ADC = ∢ ACD. Allein, wegen BD = BC, müßte auch ∢ BDC = ∢ BCD seyn, welches widersprechend ist. — Sollte aber BA + AC < BC seyn, so wäre, bei der nämlichen Construction, BD < BC, daher ∢ BCD < ∢ BDC. Allein es ist auch ∢ ACD = ∢ BDC; folglich müßte ∢ BCD < ∢ ACD seyn, was ebenfalls unmöglich ist.

XLVIII. Zum 21. Satze. Dieser Satz gilt auch dann noch, wenn der Punct nicht in der Ebene des Dreiecks, sondern in einer seiner Seiten genommen wird. Nähme man ihn in E, so wäre BA + AE > BE; allein es ist

EC = EC, folglich auch

BA + AC > BE + EC.

Daß hier auch ∢ BEC > ∢ A ist, leuchtet von selbst ein.

XLIX. Zum 22. Satze. a) Es ist klar, daß die Construction des zu bildenden Dreiecks von der Nothwendigkeit des Durchschnitts der beiden Kreise abhängig ist, welche hier, so wie oben geschah (XXVIII.) nachgewiesen wird. Auch erkennt man hier eben so, daß auch auf der andern Seite von ED noch ein ähnlicher Durchschnittspunct Statt hat, wodurch ein zweites, dem ersten congruentes Dreieck gebildet werden kann.

b) Auch läßt sich durch diesen Satz die Entstehung des gleichschenkeligen Dreiecks erkennen, wenn nur die Linie, welche dessen Grundlinie werden soll, kleiner ist, als die beiden gleichen Schenkel zusammengenommen.

c) Wenn die drei ungleichen Linien mit A, B und C bezeichnet werden und A die größte von ihnen ist, so wird ein Dreieck von ihnen möglich seyn, wenn $B + C > A$ ist. Denn, wenn dieses ist, muß auch $A + B > C$ und $A + C > B$ seyn.

d) Auch muß bei diesen drei Linien der Unterschied je zweier kleiner, als die dritte seyn. Wenn nämlich

$A + B > C$ ist, und man nimmt

$B = B$ beiderseits weg, so ist

$A > C - B$, und ebenso für die übrigen.

e) Wenn man den Satz: Zwischen zwei Puncten ist die gerade Linie die kürzeste, als Grundsatz voraussetzt, so läßt sich die Construction der Dreiecke sogleich in den ersten Sätzen der Geometrie befriedigend nachweisen. Man sehe meine Geometrische Wissenschaftslehre. 3. Auflage 1826. S. 8 und f. worin alle mögliche Lagen excentrischer Kreislinien auseinander gesetzt sind.

L. Zum 23. Satze. Die Construction wird etwas einfacher, wenn man in den Schenkeln des Winkels DCE die $CE = CD$ nimmt und dann auch $AG = AF$ macht.

LI. Zum 24. Satze. a) Von diesem Satze, wovon Euclides nur einen Fall, in Bezug auf die mögliche Lage angegeben und bewiesen hat, theilen wir folgende Entwickelung mit.

Es sei (Fig. 243.) ABE ein willkührliches Dreieck, welches bei B einen spitzen Winkel hat. Wird hier von A auf BE das Loth AD gezogen, $DC = BD$ gemacht und AC gezogen, so ist ACE ein zweites Dreieck, worin $AC = AB$, ferner $AE = AE$ und $\measuredangle CAE < \measuredangle BAE$ ist.

Diese beiden Dreiecke entsprechen daher der Voraussetzung des Lehrsatzes und das Kennzeichen der Lage besteht darin, daß der Punct C der Seite AC des Dreiecks ACE in die Seite BE des Dreiecks ABE fällt. Daß nun hier $CE < BE$ ist, bedarf keines weitern Beweises, da es unmittelbar aus dieser Lage des Punctes C zwischen B und E hervorgeht.

b) Nun könnte aber der $\measuredangle CAE$, mit Beibehaltung der Größe seiner Schenkel, noch kleiner werden. Wenn derselbe

EAF ist, so muß AF innerhalb des Dreiecks ACE liegen (XLV, d.) Hier ist nun AF + FE < AC + CE (21. S.) folglich, weil AF = AC, auch FE < CE und folglich um so mehr noch FE < BE.

c) Würde aber der Winkel CAE größer, so muß der Schenkel AC, da ∢ EAC immer kleiner als ∢ EAB bleiben muß, die CB zwischen C und B durchschneiden und etwa die Lage AG haben, wodurch GAE das zweite Dreieck würde. Zieht man nun die Verbindungslinie BG, so ist, wegen AB = AG, auch ∢ ABG = ∢ AGB. Allein ∢ EBG < ∢ ABG und ∢ BGA < ∢ BGE, folglich ∢ BGE > ∢ EBG und wieder BE > GE. Daß G u n t e r BE liegt, ist klar.

d) Wäre aber der Winkel ABE (Fig. 244.) des gegebenen Dreiecks ein rechter oder ein stumpfer, so muß die Seite AF = AB, wenn ∢ EAF < ∢ EAB ist, ganz innerhalb des Dreiecks ABE liegen (XLV, d.) und es ist, wegen AB + BE > AF + FE und AB = AF, auch nun sind BE > FE.

e) Auch läßt sich dieser Satz mit vieler Klarheit so darstellen. Es sei in den beiden Dreiecken (Fig. 245.) ABC und ABD, die Seite AB = AB, ∢ ABC > ∢ ABD und BC = BD; so ist der Winkel ACB entweder ein rechter oder ein stumpfer oder ein spitzer. In den beiden ersten Fällen muß, wenn ∢ ABE = ∢ ABD, BE = BD gemacht und AE gezogen wird, das Dreieck AEB ≅ Dreieck ADB, ganz innerhalb des Dreiecks ACB liegen. Daher ist AC + CB > AE + EB und folglich wegen CB = EB, auch AC > AE d. h. AC > AD.

Ist aber der Winkel ACB ein spitzer (Fig. 246.) so ziehe man BE lothrecht auf AC, nehme EF = EC und ziehe BF, so ist entweder

1) ∢ ABF = ∢ ABD oder
2) ∢ ABF > ∢ ABD oder
3) ∢ ABF < ∢ ABD.

Im 1. Falle ist △ AFB ≅ △ ADB und AF = AD < AC.

Im 2. Falle fällt Dreieck ADB (wie in Fig. 245.) ganz innerhalb des Dreiecks ACB und es ist wie zuvor AD < AC.

Im 3. Falle fällt D in G ausserhalb des Dreiecks ACB und zwar so, daß BG die FC zwischen F und G schneiden muß. Zieht man nun GC, so ist, wegen BG = BC, auch ∢ BGC = ∢ BCG; folglich ∢ AGC > ∢ ACG und daher AC > AG d. h. AC > AD.

LII. Zum 25. Satze. a) Dieser Satz kann auf folgende Art bewiesen werden, ohne Rücksicht auf den 24. Satz, dessen Umkehrung er ist. Man denke sich ein Dreieck bac, welches mit dem Dreiecke BAC (Fig. 247.) ba = BA, dann ac = AC, aber bc < BC hat, so soll ∢ a < ∢ A seyn.

Man lege das Dreieck bac so in die Ebene des Dreiecks CBA, daß sich die gleichen Seiten ba und BA einander decken und daß der Punct c nach jener Seite von AB fällt, auf welcher sich C befindet. Wird nun mit AC aus A ein Kreis beschrieben, dessen Bogen FCDG ist, so muß die Seite ac von a irgendwo in diesen Bogen fallen. Fiele sie nun von C gegen G, etwa in D, so ziehe man DC. Hier ist nun, wegen AD = AC, auch ∢ ADC = ∢ ACD. Allein ∢ BDC < ∢ ADC und ∢ BCD > ∢ ACD; folglich auch ∢ BCD > ∢ BDC und BD > BC. Es müßte daher auch bc > BC seyn, was der Annahme bc < BC widerspricht.

b) Läge aber die Seite ac in AC, so müßten sich die Dreiecke bac und BAC einander decken, weil sie auch noch den Winkel BAC gemein hätten und es wäre bc = BC, da doch bc < BC angenommen worden ist.

Daher muß ac mit dem Puncte c von C nach F in dem Bogen DCF eintreffen und folglich ∢ bac < ∢ BAC seyn.

c) Wenn dieser Satz vor dem 24. Satze bewiesen wird, so kann dieser letztere sehr leicht daraus abgeleitet werden. Es sei nämlich (Fig. 248.) in den Dreiecken ABC und DEF die Seite AB = DE, AC = DF und ∢ BAC > ∢ EDF, so ist BC > EF.

Denn wäre nicht BC > EF, so müßte entweder BC = EF oder BC < EF seyn. In jenem Falle wäre △ ABC ≅ △ DEF und ∢ BAC = ∢ EDF, gegen die Voraussetzung. In diesem Falle würde (nach a.) ∢ BAC < ∢ EDF seyn, welches ebenfalls der Annahme widerspricht.

LIII. Zum 26. Satze. a) Dieser Satz behauptet die Congruenz zweier Dreiecke, welche zwei Winkel und eine Seite, einzeln genommen, mit einander gemein haben, wobei zwei Fälle eintreten können, je nachdem diese Dreiecke eine Seite und die zwei daran liegenden Winkel, oder eine Seite, einen daran liegenden und einen ihr gegenüberstehenden Winkel gemeinschaftlich haben.

I. Wenn in den Dreiecken ABC und DEF (Fig. 249.) BC = EF, ∢ B = ∢ E und ∢ ACB = ∢ DFE ist, so lege man jenes Dreieck so in die Ebene von diesem, daß B in E, BA längs ED und C auf eben die Seite von DE fällt, auf welcher sich F befindet. Hier muß BC die EF vollkommen decken. Sollte nun die Seite CA nicht in FD fallen, so müßte sie die Lage von FG oder von FH haben, wodurch ∢ DFE < ∢ ACB, oder ∢ DFE > ∢ ACB wäre, gegen die Voraussetzung. Folglich decken sich die Dreiecke ABC und DEF.

II. Wäre aber in diesen Dreiecken ABC und DEF, ausser BC = EF und ∢ B = ∢ E noch ∢ A = ∢ EDF, so würde man jenes so in die Ebene von diesem legen können, daß B in E, BC in EF und BA längs ED fällt. Fiele nun die CA nicht auch in FD, so müßte sie nach FH oder nach FG fallen. Wäre jenes, so würde ∢ FHE > ∢ A, und wäre dieses, so würde ∢ FHE < ∢ A seyn (16. S.), gegen die Voraussetzung.

b) Wenn zwei Dreiecke zwei Seiten, einzeln genommen, und einen Winkel, welcher der einen dieser Seiten gegenüberliegt, mit einander gemein haben, so sind sie nicht immer congruent, da aus diesen Stücken zwei Dreiecke von verschiedener Gestalt und Größe gebildet werden können.

Es sei (Fig. 250.) ABE ein gegebenes Dreieck, so muß irgend einer seiner Winkel ein spitzer seyn. Es sei ∢ B < R, so ziehe man aus A auf BE das Loth AC, mache CD = CB und

ziehe AD, so ist auch AD = AB. Daher ist hier ein zweites Dreieck ADE entstanden, worin AD = AB, AE = AE und ∢E = ∢E ist. Da nun ∢ADE > R und ∢ABE < R, auch beide Winkel der gemeinschaftlichen Seite AE gegenüberliegen, so haben beide Dreiecke, bei verschiedener Größe, auch verschiedene Gestalt.

Wäre nun zugleich bestimmt, ob das Dreieck, welches AB und AE > AB zu Seiten und den ∢E zu dem einen Winkel hat, in Bezug auf den, der Seite AE gegenüberliegenden Winkel, ein stumpfwinkeliges sei oder nicht, so würde die Zweideutigkeit wegfallen und es müßte im ersten Falle das Dreieck ADE, im zweiten Falle das Dreieck ABE seyn.

c) Aus dem Bisherigen ist Folgendes erwiesen, in Bezug auf die Congruenz der Dreiecke:

1) Drei Seiten von bestimmter Größe bestimmen die Natur eines Dreiecks,
2) Zwei Seiten und der dazwischen liegende Winkel ebenfalls,
3) Zwei Seiten und ein Winkel, welcher nicht der eingeschlossene ist, bestimmen zweierlei Dreiecke,
4) Eine Seite und die zwei daran liegenden Winkel bestimmen nur ein Dreieck,
5) Eine Seite, ein anliegender und ein ihr gegenüberliegender Winkel ebenfalls,
6) Die drei Winkel eines Dreiecks bestimmen (wie weiter unten bewiesen wird) nicht ein einziges Dreieck, sondern unzählig viele.

LIV. Zum 27. Satze. a) Mit diesem Satze beginnt Euclides die Lehre von den Parallellinien, wozu folgende Erklärungen zu bemerken sind.

Wenn zwei gerade, in einerlei Ebene liegende, Linien (Fig. 251.) AB und CD von einer dritten geraden EF in G und H geschnitten werden, so entstehen um jeden dieser Durchschnittspuncte vier Winkel, welche paarweise besonders benennt werden.

Die Winkel AGH und GHD, so wie auch die Winkel BGH und GHC, welche zwischen den Linien AB und CD, aber auf

entgegengesetzten Seiten der schneidenden Linien EF liegen, heissen Wechselwinkel.

Der Winkel EGB und EHD, so wie auch ∢ EGA und ∢ EHC, dann ∢ FHD und ∢ FGB, endlich ∢ FHC und ∢ FGA, welche aufeinerlei Seite der schneidenden, theils ausserhalb, theils innerhalb der geschnittenen Linien so liegen, daß keiner der Nebenwinkel des andern ist, heissen der äussere und innere Winkel.

Die Winkel BGH und GHD, so wie AGH und GHC endlich, welche auf einerlei Seite der schneidenden Linie und innerhalb der geschnittenen Linien liegen, werden die beiden innern Winkel genennt.

b) Durch diesen 27. Satz ist daher die Entstehung der Parallelen wissenschaftlich nachgewiesen und somit die frühere Worterklärung in eine Sacherklärung verwandelt worden. Auch läßt sich die Erzeugung dieser Linien dadurch nachweisen, daß man in einer geraden Linie zwei beliebige Puncte nimmt und aus ihnen zwei Lothe auf sie errichtet. Denn wenn (Fig. 252.) auf AB aus C und D die Lothe CE und DF errichtet werden, so ist nicht nur ∢ ECD = ∢ FDC = R, sondern auch, wenn man EC nach G und FD nach H verlängert, ∢ GCD = ∢ CDH = R. Folglich sind hier die Wechselwinkel ECD und CDH, oder GCD und CDF einander gleich.

c) Auch kann man sich ein gegebenes Dreieck (Fig. 253.) ABC noch einmal in umgekehrter Lage als CDA construiren, wo denn, da nun ∢ ACB = ∢ CAD und ∢ BAC = ∢ DCA ist, auch AD mit BC und AB mit DC parallel seyn muß. Dann könnte dieses Dreieck ABC noch jenseits der Seite BC und jenseits der Seite AB gelegt werden, um Parallellinien zu bilden.

LV. Zum 28. Satze. Es sind also überhaupt zwei gerade Linien mit einander parallel, wenn

1. Die Summe der beiden innern Winkel zwei rechte beträgt,
2. Wenn der äussere Winkel seinem innern gleich ist, und
3. Wenn zwei Wechselwinkel einander gleich sind.

Auch findet man leicht, daß aus jeder dieser drei Bedingnisse jede der zwei andern als Folge abgeleitet werden kann, so wie jede derselben durch die bisherigen Sätze einfach zu construiren ist. —

LVI. Zum 29. Satze. a) Der Beweis dieses Satzes beruht zum Theil auf der, als wahr erkannten, Behauptung des berüchtigten XI. Euclidischen Axioms und hat also nur dann volle Ueberzeugungskraft, wenn man sie diesem XI. Grundsatze zugesteht. Was bereits oben (XXVI.) von demselben im Allgemeinen bemerkt worden ist, kann hier näher erörtert werden; doch ohne Anspruch auf Vollendung zu machen.

Es sei (Fig. 254.) AB dadurch mit CD parallel, daß $\measuredangle$ BGH $+ \measuredangle$ GHD $= 2$ R ist, so muß, wenn die GK einen beliebigen Winkel KGB mit GB bildet, nunmehr $\measuredangle$ KGH $+ \measuredangle$ GHD < 2 R seyn. Nun werden die Linien GB und HD, wenn jene noch so weit über B, und diese noch so weit über D verlängert wird, niemals zusammentreffen; allein GK ist gegen HD geneigt und wird sich bei ihrer Verlängerung über K der HD immer mehr und mehr annähern. Daher lehrt die Anschauung, daß die verlängerte GK die ebenfalls verlängerte HD einmal durchschneiden wird.

b) Obschon man geneigt seyn möchte, dieser Darstellung Beifall zu schenken, so kann sie doch auf folgende Weise mehr begründet werden. Es sei (Fig. 255.) $\measuredangle$ ACD $=$ R und $\measuredangle$ A $<$ R, so muß das aus C auf AB gezogene Loth CE zur Rechten von A in AB; und das aus E auf CD gezogene Loth EF zur Rechten von C in CD eintreffen und so fort von den übrigen Lothen FG, GH, HJ, JK u. s. f. Nun ist aber AC $>$ CE und CE $>$ EF, folglich auch AC $>$ EF und die gerade Linie AB liegt in E näher bei CD als in A. Auf ähnliche Art ist auch EF $>$ GH; GH $>$ JK u. s. w. Daher nähert sich die gerade AB der geraden CD in den Puncten E, G, J und in den folgenden immer mehr, je weiter sie verlängert wird.

Eben dieses gilt auch von den zwischen A und E, zwischen E und G, zwischen G und J u. s. f. liegenden Puncten. Es sei M (Fig. 256.) ein solcher Zwischenpunct, so ziehe man das Loth MN und die Verbindungslinien CM und NE. Hier ist, wegen $\measuredangle$ CEA $=$ R, auch CMA $>$ R, folglich AC $>$ CM. Allein, wegen $\measuredangle$ MNC $=$ R ist auch CM $>$ MN; folglich muß AC $>$ MN seyn. — Auf ähnliche Art ist, wegen $\measuredangle$ NEM $>$ R, auch MN $>$ NE; aber NE $>$ EF, folglich auch MN $>$ EF.

c) Da sich nun die gerade Linie AB (Fig. 255.) in allen Puncten von A bis J der CD immer mehr annähert, so kann man wohl als Grundsatz annehmen, sie werde sich, bei ihrer Verlängerung über J, nicht mehr weiter von CD entfernen können und es werde somit das willkührlich gezogene Loth ST ebenfalls $<$ AC seyn.

d) Nun sei (Fig. 257.) $\measuredangle$ ABC $<$ R, V ein in dessen Schenkel BA beliebig gewählter Punct und VN ein Loth auf BC, so kann, wenn VH $=$ BV gemacht und HP lothrecht auf BC gezogen wird, die Linie NP nicht kleiner als BN seyn.

Denn wenn NV über T verlängert und aus H ein Loth HM auf NO gezogen wird, so kann HM nicht größer als PN seyn. Wäre dieses, so mache man ND $=$ HM und ziehe DH, wodurch $\measuredangle$ HDN $<$ R würde und HM nicht größer als PN seyn kann (c). Daher muß $<$HM PN oder HH $>$ PM. Allein da nun VH $=$ VB, $\measuredangle$ HVM $=\measuredangle$ BVN und $\measuredangle$ VMH $=\measuredangle$ VNB $=$ R ist, so muß auch $\triangle$ VMH $\cong\triangle$ VNB und HM $=$ NB seyn. Daher ist auch entweder NP $=$ BN oder NP $>$ BN.

e) Nimmt man nun HF $=$ BH, so wird eben so bewiesen, daß GP $=$ PB oder GP $>$ PB ist. Es ist aber BF $=$ 4 BV, und BG $=$ 4 BN oder BG $>$ 4 BN, daher wird für 2 BF $=$ 8 BV in BA eine Linie entstehen, welche entweder $+$ 2 BG $=$ 8 BN oder $>$ 8 BN seyn wird. So wie also die Linien BV, BH, BF u. s. f. nach der Progression 1, 2, 4, 8... wachsen, so werden die ihnen entsprechenden Abschnitte BN, BP, BG u. s. f. in eben dieser Progression oder in einer noch größern zunehmen.

f) Wenn a und b zwei gleichartige Größen sind und a $>$ b ist, so gibt es, wenn b nach der Progression 2 b, 4 b, 8 b, 16 b u. s. f. ohne Ende zunehmen kann, in dieser Reihe irgend einmal ein Vielfaches von b, welches größer als a ist. Denn weil b mit a verglichen werden kann, so sei $\frac{a}{b} = q$, wo q entweder eine ganze Zahl oder eine ganze Zahl nebst einem eigentlichen Bruche seyn muß, welcher $<$ b ist. Hier wird nun b $\times$ q $=$ a. Allein weil b in dem Verhältnisse 2 b, 4 b, 8 b.... zunimmt, so gibt es einmal ein Vielfaches von b, welches größer als das

q fache von b ist, und dieses muß dann auch größer als a seyn.

g) Wenn nun (Fig. 257.) ∢ ABC < R und in einem willkührlichen Puncte E des Schenkels BC ein Loth auf BC errichtet wird, so muß dasselbe, gehörig verlängert, den andern Schenkel einmal durchschneiden. — Denn wenn man aus einem in BA willkührlich gewählten Puncte V ein Loth VN auf BC zieht, so ist BN eine Linie, welche mit BE verglichen werden kann, da, wenn diese BE nach der Progression $^1/_2$ BE, $^1/_4$ BE $^1/_8$ BE u. s. f. abnimmt, einmal eine Linie entsteht, welche kleiner als BN ist. Macht man nun VH = BV, HF = BH u. s. f. und zieht aus den Endpuncten dieser Linien die Lothe HP, FG u. s. w. auf BC, so muß man auf BC einmal eine Linie wie BG erhalten, welche größer als BE ist (f). Allein jetzt liegt der Punct E zwischen G und B und ein aus E errichtetes Loth muß, da es weder in F eintreffen, noch die FG irgendwo schneiden kann, zwischen F und B in BF eintreffen, d. h. die verlängerte EP muß die BA schneiden.

h) Von diesem Satze kann nun leicht die Anwendung auf den strengen Beweis des eilften Euclidischen Axioms gemacht werden. — Wenn nämlich die zwei innern, auf einerlei Seite der schneidenden Linie liegenden Winkel zusammen weniger als zwei Rechte betragen, so können drei Fälle Satt finden:

1) Einer ist ein rechter, der andere ein spitzer Winkel.
2) Beide sind spitze Winkel,
3) Der eine ist ein stumpfer, der andere ein spitzer Winkel.

Für 1) ist der Satz kurz zuvor (in g) bewiesen,

Für 2) ziehe man von dem Scheitel des einen spitzen Winkels ein Loth auf die gegenüberliegende Linie, so liegen an diesem Lothe zwei innere Winkel, wovon einer ein rechter und der andere ein spitzer ist, und es tritt wieder der vorige Beweis (g) ein.

Für 3) Wenn aber (Fig. 258.) die AB und CD von der EF so in G und H geschnitten wird, daß ∢ GHD > R, aber dennoch ∢ GHD + ∢ BGH < 2 R, so ziehe man durch H eine Linie JHK, wodurch ∢ BGH + ∢

GHK = 2 R, so ist JK mit AB gleichlaufend. Wird nun von H auf GB das Loth HL gezogen, so muß auch ∢ LHK = R seyn. Denn wäre ∢ LHK < R, so müßten LB und HK, über B und K verlängert, einmal zusammentreffen (g) und könnten nicht parallel seyn. Wäre aber ∢ LHK > R, so müßte ∢ LHJ < R seyn und die Linien LA und HJ müßten einmal nach A und J zusammenlaufen und wären ebenfalls nicht parallel.

Da nun ∢ LHK = R ist, so muß ∢ LHD < R und folglich ∢ HLB + ∢ LHD < 2 R seyn und die Linien AB und CD müssen, über B und D verlängert, sich auch einmal schneiden. (g.)

i) Diesen Beweis des 11. Euclidischen Grundsatzes hatte der Verfasser dieses bereits vor mehr als zwanzig Jahren der vormaligen Departementalgesellschaft der Wissenschaften und Künste zu Mainz, welche ihn in ihre Mitte aufgenommen hatte, übersendet. Allein bald hat der Verfasser mit Andern bemerkt, auch diese Theorie entspreche deßhalb nicht der Aufgabe, die man sich als Zielpunct gewählt hatte, weil ein Hülfssatz (in c) nicht ausschließlich durch streng erwiesene Lehren der Geometrie, sondern zum Theil durch die blose Anschauung begründet sei. Es soll nämlich der Beweis des 11. Grundsatzes des Euclides so geführt werden, daß der Beweisgrund nicht auf der Anschauung, sondern auf streng bewiesenen Sätzen der Wissenschaft beruht. Es können hierzu nicht nur die ersten 28 Sätze der Elemente, sondern alle, welche aus ihnen abzuleiten sind, benützt werden; so, daß dem geometrischen Forschgeiste allerdings ein weites Feld zu neuen Untersuchungen dargeboten wird.

k) Obwohl nun seit mehr als 2000 Jahren von den scharfsinnigsten Geometern Versuche erschienen sind, diese Aufgabe zu lösen, so ist es, in dem vorhin bemerkten Sinne, noch Keinem gelungen, den Gordischen Knoten so befriedigend zu entwickeln, wie man dieses, ohne einen Hülfssatz der Anschauung zu gebrauchen wünscht.

Aeltere und neuere Schriften hierüber sind folgende:

1) *G. S. Klügel*, Conatuum praecipuorum theoriam parallelarum demonstrandi recensio. Göttingae, 1763. 30 p. 4to cum. tab. aen.

2) Mathias Hauser, Analytiſche Abhandlung der Anfangsgründe der Mathematik u. ſ. w. 2r Theil, die Meßkunſt. Wien, 1780, S. 34. u. f. 8.

3) J. H. Lambert's Theorie der Parallellinien. In dem Leipziger Magazin für reine und angewandte Mathematik von Bernoulli und Hindenburg. 1786, 2tes Stück S. 137; 3tes Stück 325 u. f. 8.

4) Joh. Schulz, Darſtellung der vollkommenen Evidenz und Schärfe ſeiner Theorie der Parallelen. Königsberg, 1786. 8. Auch früher ſchon: deſſen entdeckte Theorie der Parallelen, Königsberg 1784. 8.

5) Lazarus Bendavid, Ueber die Parallellinien. In einem Schreiben an Herrn Hofrath Karſten. Berlin, 1786. 8. Mit 1 Kupfertafel.

6) Schübler, Verſuch der Einrichtung unſeres Erkenntnißvermögens durch Algebra nachzuſpüren. Leipzig, 1788.

7) *J. H. Voigt*, Commentatio mathematica exhibens tentamen ex notione distincta et completa lineae rectae veritatem axiomatis XI. Euclidis demonstrandi. Jenae, 1790, 34 p. 4. cum. tab. aen.

8) J. G. Büſch, Auszug aus der Encyclopädie der mathematiſchen Wiſſenſchaften. Hamburg, 1795. §. 10. u. f.

9) Rehbein, Verſuch einer neuen Grundlegung der Geometrie. Göttingen, 1795.

10) J. K. B. Hauff, Neuer Verſuch einer Berichtigung der Euclidiſchen Theorie der Parallelen. In dem Archiv der reinen und angewandten Mathematik von Hindenburg. 9tes Heft. Leipzig, 1799 S. 74 u. f.

Deſſen Nachtrag zu ſeinem neuen Verſuche u. ſ. w. im 10ten Hefte dieſes Archivs S. 178 u. f.

11) *J. C. Schwab*, Tentamen novae parallelarum theoriae, notione situs fundatae. Stuttgardiae, 1801. XXX et 25 p. 8. c. tab. aen.

12) J. J. J. Hoffmann, Versuch einer neuen und gründlichen Theorie der Parallellinien, nebst Widerlegung des Hauffschen Versuchs u. s. f. Offenbach a. M., 1801. 48. S. 8. Mit 1 Tafel.

13) A. *Kircher*, Nouvelle théorie des parallèles, avec un appendice, contenant la manière de perfectionner la théorie des parallèles de A. M. Legendre. A Paris, 1803. XII. et 64. p. 8.

14) *Grashof*, Theses sphaerologicae, quae ex sphaerae notione veram rectae lineae sistunt definitionem, omnisque geometriae jaciunt fundamentum. Berolini, 1806.

15) J. J. J. Hoffmann, Critik der Parallelen-Theorie. Jena 1807. XIX. u. 276 S. 8 mit 10 Kupfertafeln. Diese Schrift enthält die Darstellung und Critik der Parallelenlehre von Clavius, Proclus, Hauff, Bossüt, Kästner, Simson, Lacroix, Lorenz, Segner, Nassareddin, Kirchner, Schmidt, Legendre, Schwab, Tacquet, Hindenburg und vom Verfasser.

16) C. Hauff, Euclids Elemente, das erste bis zum sechsten, sammt dem eilften und zwölften Buche, u. s. f. 2te Auflage. Marburg 1807. Der Anhang enthält S. 347—369 eine neue Theorie der Parallelen.

17) Scheibel, zwei mathematische Abhandlungen. I. Vertheidigung der Theorie der Parallelen nach dem Euclides. Breslau, 1807.

18) Ferd. C. Schweikart, die Theorie der Parallellinien, nebst dem Vorschlage ihrer Verbannung aus der Geometrie. Jena und Leipzig 1808. 138 S. gr. 8. Mit 5 Kupfertafeln.

19) C. S. Duvrier, Theorie der Parallelen als Ankündigung eines neuen Versuchs über das Erkenntnißvermögen. Leipzig 1808. 55 S. 8. Mit 1 Tafel.

20) *J. C. Schwab*, Essai sur la situation, pour servir de supplément aux principes de la Géométrie. Stuttgardt 1808. 51 p. 8.

21) J. F. Duttenhofer, Versuch eines strengen Beweises der Theoreme von den Parallellinien u. s. w. Stuttgardt 1813. 24 S. 8. Mit 1 Tafel.

22) Chr. Al. Herrmann, Versuch einer einfachen Begründung des XI. Euclidischen Axioms u. s. f. Frankfurt a. M. 1813. 4. Mit 2 Kupfertafeln.

23) *J. C. Schwab*, Commentatio in primum Elementorum Euclidis librum, qua veritatem Geometriae principiis ontologicis niti evincitur, omnesque propositiones, axiomatum geometricorum loco habitae, demonstrantur. Stuttgardiae 1814. 67 p. c. 1 tab.

24) Matth. Metternich, Vollständige Theorie der Parallellinien u. s. w. Mainz, 1815. XIV. und 44 S. gr. 8. Mit 1 Kupfertafel. — Dessen Nachtrag zur vorgedachten Theorie. 16 S.

25) J. A. P. Bürger, Vollständige Theorie der Parallellinien. Nebst Anmerkungen über andere bisher erschienene Parallel-Theorien. Karlsruhe 1816. XII. und 35 S. 8. Mit 1 Tafel.

26) A. L. Crelle, Ueber Parallelen-Theorien und das System in der Geometrie. Berlin, 1816. 113 S. 8. Mit 4 Tafeln.

27) C. C. H. Vermehren, Versuch, die Lehre von den parallelen und convergenten Linien aus einfachen Begriffen vollständig herzuleiten und gründlich zu erweisen. Güstrow, 1816. 26. S. kl. 8. Mit 1 Tafel.

28) *F. L. Wachter*, Demonstratio axiomatis geometrici in Euclideis undecimi. Gedani, 1817. 16 p. —

Dessen Aufsatz hierüber in der Zeitschrift für Astronomie und verwandte Wissenschaften. B. II., m. P. 1816.

29) C. F. H. Euclid's eilfter Grundsatz als Lehrsatz bewiesen. Hamburg 1818. 8. S. 4.

30) C. W. Heßling, Versuch einer Theorie der Parallellinien. Halle, 1818. XXXXVI. und 223 S. gr. 8. Mit 5 Tafeln. Diese Schrift enthält S. 1—73 Versuch einer Theorie der Parallellinien; S. 74—136 Grundsätze zu derselben; S. 137—215 Beiträge zur Verhältnißlehre, und S. 216—223 Zusammenstellung dessen, was in Eucl. Elem. B. I. über den Parallelismus vorgetragen worden ist.

31) S. Ohm, Grundlinien zu einer zweckmäßigen Behandlung der Geometrie, Erlangen, 1817. S. 91.

32) *König*, supplementa in Euclidem. Utini, 1819.

33) A. F. Lüdicke, Versuch einer neuen Theorie der Parallellinien, im Zusammenhange mit den Grundlehren der Geometrie dargestellt. Meißen, 1819. 16 S. gr. 8. Mit 1 Tafel.

34) J. W. Müller, Ausführliche evidente Theorie der Parallellinien. Nürnberg, 1819. 79 S. gr. 8. Mit 1 Kupfertafel.

35) M. Ohm, Kritische Beleuchtung der Mathematik. Berlin, 1819.

36) K. L. Struve, Theorie der Parallellinien. Königsberg, 1820. XII. und 36 S. gr. 8. Mit 19 eingedruckten Holzschnitten.

37) J. A. P. Bürger, Vollständige Theorie der Parallellinien u. s. f. 2te mit Erläuterungen vermehrte Ausgabe. Carlsruhe 1820. XVI. und 53 S. gr. 8. Mit 1 Tafel.

38) M. Creiznach, Abhandlung über den XI. Euclidischen Grundsatz in Betreff der Parallellinien. Nebst einem neuen Beweise des 28. S. im XI. Buche der Elemente. Mainz, 1821. 28 S. 4. Mit 13 eingedruckten Holzschnitten.

39) J. C. Küster, Versuch einer neuen Theorie der Parallelen. Mit einer Vorrede vom Hofrathe Bähreus. Hamm, 1821. 38 S. Mit 3 Kupfertafeln.

40) B. F. Mönnich, Ein Versuch, die Theorie der Parallellinien auf einen Grundbegriff der allgemeinen Größenlehre zurückzuführen. Berlin, 1821. 56 S. 8. Mit 2 Tafeln.

41) *C. Hauff*, Nova rectarum parallelarum theoria. Editio altera supplementis aucta. Francof. ad M. 1821. VIII. et 86 p. h. Sect. I. theoria rectarum parallelarum e contemplatione trigoni aequilateri deducta; sect. II. th. rect. parall. e contempl. quadrati et sect. III. e contempl. circuli deducta.

42) Fries, Mathematische Naturphilosophie, nach philosophischer Methode bearbeitet. Heidelberg, 1822. S. 355 u. f.

43) Math. Metternich, Vollständige Theorie der Parallellinien, oder geometrischer Beweis des eilften Euclidischen Grundsatzes. 2te umgearbeitete Auflage. Mainz, 1822 XX. und 41 S. 8. Mit 1 Tafel.

44) C. A. Müller, Theorie der Parallelen. Marburg, 1822. IV. und 40 S. 4. Mit 1 Tafel.

45) *Dan. Huber,* Nova theoria de parallelarum linearum proprietatibus. Basilea, 1823. 4o p. 8. cum 1 tabl.

46) *F. G. L. Wahl,* Dissertatio mathematica symbolas ad epicrisin theoriarum parallelas spectantium continens. Partic. I. Insunt IV. theoriae earumque censura (Theoria Voigtiana, Langsdorfiana, Thibautiana et Anonymi) Jenae, 1823. VIII. et 44 p. 4.

47) *Andr. Jacobi*, De undecimo Euclidis Axiomate judicium, cui accedunt pauca de trisectione anguli. Jenae, 1824. 54. 4. cum 1 tab.

48) F. A. Taurinus, Theorie der Parallellinien. Köln a. Rh., 1825. XIV u. 93. S. 8. Mit drei Steintafeln. —

Dessen Nachtrag zur Theorie der Parallellinien. 1825. 8 S. mit 1 Tafel.

49) F. A. Hegenberg, Vollständige, auf die bekannten Elementarsätze von den geraden Linien und Winkeln gegründete Theorie der Parallelen. Berlin, 1825. 46. S. 8. Mit einer Tafel.

50) J. W. Müller, Neue Beiträge zu der Parallelen-Theorie, den Beweisen des Pythagoräischen Lehrsatzes und den Berechnungsarten der Pythagoräischen Zahlendreiecke. Augsburg und Leipzig, 1826. 91. S. 8. Mit einer Tafel.

Noch bemerke man

51) *C. Eichler*, Disputatio de theoria parallelarum Schulziana. Lipsiae, 1786.

52) Bemerkungen über die Theorieen der Parallelen der Herrn Schulz, Gensichen und Bendavid. Libau, 1796.

53) *Voitius*, Percursio conatuum demonstrandi parallelarum theoriam, de iisque judicium. Göttingae, 1802.

54) Chr. Ad. Koch, Ueber Parallellinien. Ein Versuch, dem Urtheile Sachkundiger gewidmet. Hamburg, 1827. 12. S. 8. Mit eingedruckten Holzschnitten.

55) A. Neubig's Parallelen-Theorie. Baireuth, 1828. 8.

l) Da alle diese Versuche, in Bezug auf die strengen Foderungen, welche man an sie macht, mehr oder minder unvollständig sind, so entsteht die für die Geometrie sehr wichtige Frage: Ist die Lehre von den Parallellinien, mit ihren gesammten Folgerungen aus ihr, überzeugend bewiesen, oder nicht? Alle Geometer antworten: sie ist es; denn sonst würde nicht nur der größte Theil der Geometrie, sondern viele Theile der Mathematik und Physik überhaupt unvollständig und mangelhaft seyn. — Wenn nun ferner streng nachzuweisen ist, daß alle bisher erschienenen Versuche, die Parallelen-Theorie ohne Beihülfe der Anschauung zu begründen, mißlungen sind, so kann die Ueberzeugung der Geometer nur auf der unerschütterlichen und volle Gewißheit gewährenden Anschauungs-Erkenntniß beruhen. Allein nicht jede anschauliche Darstellung gewährt hierbei volle Ueberzeugung, sondern nur jene, welche sich an die, von allen Geometern als nothwendig zugestandenen, Grundanschauungen der Raumlehre am Einfachsten anschließet. Die Geometrie vereinigt in sich das Element der sinnlichen Anschauung mit dem Elemente des logischen Denkens. Weder das bloße Anschauungsvermögen, noch der bloße Verstand kann eine geometrische Wissenschaft erzeugen, und das anschauliche Fundament der Geometrie ist durchaus indemonstrabel, da es den Grund seiner Ueberzeugung in sich selber trägt. So scheint nun auch die Parallelenlehre nicht ohne Hilfslehren der Anschauung dargestellt werden zu können. Man sehe meine Abhandlung: Ueber das Verhältniß des Parallelen-Problems zur Elementar-Geometrie, in den vermischten Aufsätzen aus dem Gebiete der Physik, Philosophie und Mathematik; Frankfurt a. M., 1826. S. 340 u. f.

m) Noch theilen wir folgende Rechtfertigung des eilften Euclidischen Grundsatzes mit. Es sei (Fig. 259.) ACB = R und MN eine willkührlich gegebene gerade Linie. Macht man CE = EF = CD = DG = MN und zieht DE und GF nebst dem auf

GF aus C errichteten Lothe COH, so ist DE > CE und GF > CF; folglich auch $\frac{1}{2}$ GF oder FO > $\frac{1}{2}$ CF oder CE, d. h. FO > MN.

Wenn daher auf dem Schenkel eines halben rechten Winkels HCB ein Segment CF, welches doppelt so groß als eine willkührlich gegebene Linie MN ist, genommen und aus F das Loth FO auf den andern Schenkel CH gefällt wird, so muß dieses Loth größer als jene gegebene Linie seyn.

n) Es sei nun (Fig. 260.) ∠ QCL = $\frac{1}{2}$ R, so wird, wenn man CK = 4 MN nimmt und das Loth KS zieht, diese KS > 2 MN seyn. Macht man nun CP = CK, zieht PK und auf sie aus C das Loth CNM, so ist KP > KS, folglich $\frac{1}{2}$ KP oder KN > $\frac{1}{2}$ KS. Allein $\frac{1}{2}$ KS > MN, folglich auch KN > MN.

Wenn daher in dem Schenkel eines Winkels MCL = $\frac{1}{4}$ R ein Segment CK = 4 MN genommen und das Loth KN auf den andern Schenkel gezogen wird, so ist dasselbe auch größer als MN.

Setzt man diese Halbirungen der Winkel und diese Constructionen der Lothe auf ähnliche Art fort, so ergibt sich, daß für ein Segment = 8 MN und einen Winkel = $\frac{1}{8}$ R; für ein Segment = 16 MN und einen Winkel = $\frac{1}{16}$ R und überhaupt für ein Segment = n ∠ MN und einen Winkel = $\frac{1}{n}$ R (wo n jede Potenz von 2 darstellt) es jedesmal ein Loth gebe, welches > MN ist. Da nun die Halbirungen nach dem Gesetze $\frac{1}{2}$ R, $\frac{1}{4}$ R, $\frac{1}{8}$ R, $\frac{1}{16}$ R.... $\frac{1}{n}$ R einmal zu einem Winkel führen, welcher kleiner als jeder angegebener ist, so ist hierdurch folgender Satz bewiesen:

Es gibt in dem Schenkel eines jeden spitzen Winkels, welcher = $\frac{1}{2^n}$ R ist, einen Punct, aus welchem ein Loth auf den andern Schenkel errichtet werden kann, welches größer als jede angegebene endliche Linie ist.

o) Wäre aber der gegebene Winkel nicht = $\frac{1}{2^n}$ R, so sei (Fig. 261.) ∠ BCE derselbe; und ∠ DCE = $\frac{1}{2^n}$ R. Nach dem

Vorhergehenden gibt es für ein Segment CG ein Loth GF, welches größer als die angegebene Linie ist. Nimmt man nun CA = CG und zieht das Loth AH, so kann dasselbe, wie man leicht einsieht, weder nach AM, noch nach der verlängerten AG in N, noch von A nach F fallen, sondern muß zwischen F und C eintreffen. Wird nun GH gezogen, so entsteht das Dreieck AGH, worin ∢ HGA > ∢ HAG, folglich AH > GH ist. Denn ∢ GAG = ∢ CGA, aber ∢ AGH > ∢ CGA und ∢ HAG < ∢ CAG. Da nun GH > GF, so ist auch AH > GF.

p) Dieser, für die Lehre von den Parallelen wichtige Satz ist von dem Verfasser dieses zuerst streng erwiesen (Critik der Parallelen-Theorie. 1807. S. 267 u. f.) und dann nach Ihm in andern Schriften aufgenommen worden. Eine Anwendung zur Lösung des berüchtigten Problems ist folgende:

Es werden (Fig. 262.) die Linien AB und CD von der dritten EF in G und H so geschnitten, daß ∢ BGH + ∢ GHJ < 2R, aber ∢ BGH = R und ∢ GHJ < R ist, so lege man an HJ einen Winkel JHD, wodurch ∢ BGH + ∢ GHD = 2R wird und HD mit GB parallel seyn muß. Da nun ∢ JHD < R ist, so werden die aus a, b, c u. s. f. auf HD errichtete Lothe ad, bm, cn u. s. w. nicht nur immer größer, je weiter die in HJ liegenden Puncte von H entfernt sind, sondern es muß einmal ein Loth geben, welches größer ist als jede gegebene gerade Linie. Da aber der Abstand der beiden Parallelen AB und CD in allen Puncten ein bestimmter und endlicher ist, so muß eines jener Lothe einmal größer als dieser Abstand werden und folglich die Linie AB in ihrer Verlängerung durchschneiden.

Wenn nun dieser Durchschnitt einmal bewiesen ist, so kann das Euclidische Axiom in seiner ganzen Allgemeinheit, wie oben (in h) dargethan werden.

LVII. Zum 30. Satze. Hier liegt die Vergleichs-Parallele zwischen den geraden Linien AB und CD. Sie könnte sich aber auch auf einerlei Seite derselben befinden.

Wenn AB sowohl als EF mit CD gleichlaufend sind, so muß auch AB mit EF parallel seyn. Denn wenn die schneidende MHN gezogen wird, so ist ∢ MGB = ∢ MKD; so wie auch ∢ MHF

$=\measuredangle$ MKD. Folglich muß $\measuredangle$ MGB $=\measuredangle$ MHF und daher die AB mit EF parallel seyn.

LVIII. Zum 31. Satze. a) Es wird bei dieser Aufgabe voraus gesetzt, daß sich der gegebene Punct nicht in der Verlängerung der gegebenen Linie befindet.

b) Auch könnte (Fig. 263.) AD auf BC lothrecht und dann auf DA durch A die EF lothrecht errichtet werden.

c) Ferner könnte man die DA über A nach M willkührlich verlängern, $\measuredangle$ MAF $=\measuredangle$ MDC machen und EF ziehen.

d) Daß aber durch den Punct A nur eine Parallele mit BC möglich ist, folgt daraus, daß, wenn EF mit BC gleichlaufend ist, nun $\measuredangle$ FAD + $\measuredangle$ ADC $= 2$ R seyn muß. Wäre auch noch die JAH mit BC parallel, so müßte auch $\measuredangle$ MAD + $\measuredangle$ ADC $= 2$ R seyn und es wäre $\measuredangle$ FAD $=\measuredangle$ HAD, was unmöglich ist.

LIX. Zum 32. Satze. a) Auch könnte durch A (Fig. 264.) mit BC die DE parallel gezogen werden, wodurch $\measuredangle$ DAB $=\measuredangle$ ABC und $\measuredangle$ EAC $=\measuredangle$ ACB ist. Da nun $\measuredangle$ DAB + $\measuredangle$ BAC + $\measuredangle$ EAC $= 2$ R, so muß auch $\measuredangle$ ABC + $\measuredangle$ BAC + $\measuredangle$ ACB $= 2$ R seyn.

b) Würde dieser Satz unabhängig von der Parallelenlehre erwiesen, so könnte man hierdurch das Problem der Parallellinien vollkommen, so wie es gefodert wird, auflösen. Viele haben jenes versucht; allein Keinem ist der Beweis gelungen.

c) Wenn in dem gleichschenkeligen Dreiecke einer der gleichen Schenkel über dessen Spitze verlängert wird, so ist der entstehende Aussenwinkel noch einmal so groß, als einer der Winkel an der Grundlinie. Soll daher ein Winkel gefunden werden, welcher der Hälfte eines gegebenen CAB (Fig. 265.) gleich ist, so verlängere man CA über A, nehme AD $=$ AB und ziehe DB, so ist $\measuredangle$ D $=\measuredangle$ B $= \frac{1}{2}\measuredangle$ CAB.

d) Im gleichseitigen Dreiecke beträgt jeder Winkel $\frac{2}{3}$ des rechten Winkels. In dem rechtwinkeligen Dreiecke sind die zwei spitzen Winkel zusammen $=$ R, und wenn das rechtwinkelige Dreieck zugleich auch gleichschenkelig ist, so ist jeder spitze Winkel $= \frac{1}{2}$ R.

e) Wenn in einem Dreiecke die Größe eines Winkels bekannt ist, so kennt man auch die Summe der zwei übrigen Winkel. Und wenn in zwei Dreiecken ein Winkel gemeinschaftlich ist, so muß die Summe der zwei übrigen ebenfalls in beiden dieselbige seyn.

f) Wenn man in dem gleichseitigen Dreiecke von der Spitze ein Loth auf die Grundlinie zieht, so entstehen zwei Dreiecke, worin der größte Winkel = R, der mittlere = $^2/_3$ R und der kleinste = $^1/_3$ ist. Auch ist in diesen Dreiecken eine Cathete die Hälfte der Hypotenuse. Und wenn umgekehrt in einem rechtwinkeligen Dreiecke eine Cathete die Hälfte der Hypotenuse ist, so ist der eine spitze Winkel $^1/_2$ des andern.

g) Soll an das Ende A (Fig. 266.) einer geraden Linie BA ein Loth auf sie errichtet werden, so nehme man AC willkührlich, beschreibe das gleichseitige Dreieck ADC, verlängere CD über D bis DE = CD ist und ziehe EA, so ist diese senkrecht auf AB. Denn ∢ DAC = ∢ ADC = $^2/_3$ R. Allein ∢ EAD = $^1/_3$ R; folglich ∢ EAC = $^2/_3$ R + $^1/_3$ R = R.

LX. Zum 33. Satze. a) Durch diesen Satz wird die Worterklärung des Parallelogramms zu einer strengen Sacherklärung. Denn man sieht, wie ein Viereck entstehen kann, worin die gegenüberliegenden Seiten einander gleich und mit einander parallel sind. Ein solches Viereck wird aber ein Parallelogramm genennt.

b) Die Gleichheit der sich entgegenstehenden Seiten und ihr Parallelismus sind so innig mit einander verbunden, daß aus jener dieser und aus diesem auch jene hervorgeht. Es sei nämlich BA = DC und BD = CA, so muß, weil BC = BC ist, auch △ BAC ≅ △ CDB, folglich ∢ ABC = ∢ DCB und somit BA mit DC parallel seyn. Wegen ∢ BCA = ∢ CBD ist auch AC mit BD gleichlaufend.

Umgekehrt folgt aus dem Parallelismus von BA und DC die Gleichheit der Winkel ABC und DCB, wodurch, wegen BC = BC, wieder △ ABC ≅ △ DCB und somit BA = DC und AC = BD ist.

c) Werden zwei congruente Dreiecke, wie ABC und DCB so an die gemeinsame Seite BC gelegt, daß die Scheitel der ihr gegenüberliegenden Winkel A und D auf entgegengesetzten Seiten dieser BC und eben so auch die gleichen Winkel ACB und DBC an entgegengesetzten Endpuncten dieser BC liegen, so muß ebenfalls hieraus ein Parallelogramm ABCD entstehen. — Da auch AC an DB und BA an CD gelegt werden könnte, so werden auch hierdurch zwei Parallelogramme gebildet.

d) Denkt man sich nun (Fig. 267.) ein gleichschenkeliges rechtwinkeliges Dreieck ABC, welches auf vorbemerkte Art (c.) nach ADC gelegt wird, so ist das hierdurch entstehende Parallelogramm ABCD ein Quadrat, weil nicht nur $\measuredangle B = \measuredangle BCD = \measuredangle D = DAB = R$, sondern auch $AB = BC = CD = DE$ ist. — Wäre (Fig. 268.) das gleichschenkelige Dreieck EFG bei F stumpfwinkelig, so entstände die Raute EFGH, worin $\measuredangle F = \measuredangle H$; $\measuredangle FEH = \measuredangle FGH$ und $EF = FG = GH = HE$ ist.

e) Aus dem rechtwinkeligen ungleichseitigen Dreiecke JKL (Fig. 269.), worin $JK > KL$ ist, entsteht auf ähnliche Art das Rechteck JKLM, in welchem $JK = ML$, $JM = KL$ und $\measuredangle J = \measuredangle K = \measuredangle L = \measuredangle M$ ist. — Ist aber ein Dreieck (Fig. 270.) NOP gegeben, worin $NO > OP$ und $\measuredangle O < R$ oder $\measuredangle O > R$ ist, so entspringt hieraus die Rhomboide NOPQ, worin $NO = QP$, $NQ = OP$, $\measuredangle O = \measuredangle Q$, $\measuredangle QNO = \measuredangle QPO$ ist.

f) Daß es nur viererlei Arten von Parallelogrammen geben kann, läßt sich nun leicht einsehen. Denn entweder sind die zwei Seiten, welche einen Winkel desselben einschließen, einander gleich, oder sie sind ungleich. In jenem Falle entsteht, wenn der Winkel, welchen sie bilden, ein rechter ist, das Quadrat, und wenn derselbe schief (spitz oder stumpf) ist, die Raute. In diesem Falle entspringt, bei einem rechten Winkel, das Rechteck, und bei einem schiefen Winkel die Rhomboide. Ein fünfter Fall ist unmöglich.

g) Auch geht aus dem Bisherigen die Construction des Paralleltrapez hervor. Wenn man nämlich die Endpuncte zweier ungleichen Parallelen an einer Seite mit zwei geraden Linien verbindet, so entsteht dieses Viereck, welches einige Uebereinstim-

mung mit dem Parallelogramme hat. Es sei (Fig. 271.) AB mit CD gleichlaufend, aber AB < CD, so ist ABDC ein Parallel-trapez. Auch kann hier AC nicht mit BD gleichlaufend seyn. Denn wäre dieses, so müßte, wenn BC gezogen wird, ∢ ACB = ∢ DBC und folglich △ ABC ≅ △ BCD, daher auch AB = CD seyn, gegen die Voraussetzung.

h) Das gewöhnliche Trapez entsteht auf folgende Weise: Es sei (Fig. 272.) ABCD ein Parallelogramm. Man verlängere zwei Parallelseiten DA und CB über A und B nach E und F, nehme in der Ebene EABF einen willkührlichen Punct H und ziehe AH und HB, so ist AHCD ein solches Trapez. Denn da es durch A nur eine Parallele AB mit DC und durch C nur eine Paral-lele CB mit DA gibt, so kann AH nicht mit DC und CH nicht mit DE gleichlaufend seyn. — Nimmt man den Punct J inner-halb des Parallelogramms, so entsteht das Paralleltrapez DJBC, und, wenn dieser Punct J in der Ebene des Dreiecks BDC liegt, ein Viereck mit einem einwärts gehenden Winkel.

i) Auch können die Parallellinien nun als gleichweit-abstehende erwiesen werden. Es sei (Fig. 273.) AB mit CD gleichlaufend und von dem willkührlichen Puncte M das Loth MN, von F das Loth FH auf CD gezogen. Hier ist, wegen ∢ MNH = ∢ FHN, auch MN mit FH parallel, folglich, wenn MH ge-zogen wird, ∢ NMH = ∢ MHF. Da aber auch ∢ NHM = ∢ FMH ist, so muß △ NMH ≅ △ FHM und daher MN = FH seyn. Da dieser Beweis nun ebenso von allen übrigen Puncten in AB und CD gilt, so sind Parallelen auch gleichweit-abstehende Linien. Wenn daher die Linie MN unter dem Winkel MNC = ∢ MND = R sich mit dem Endpuncte N und, in einerlei Ebene bleibend, von N nach D bewegt, so beschreibt ihr anderer Endpunct M eine gerade Linie MB, welche mit CD gleichlaufend ist. — Durch Hilfe dieses letztern Satzes, welcher aber unab-hängig von der Parallelentheorie bewiesen werden muß, haben Mehrere es versucht, diese Lehre vollkommen befriedigend zu ent-wickeln, was Ihnen jedoch nicht in dem Sinne gelungen ist, wie man es fodert.

LXI. Zum 34. Satze. a) Diese Behauptung setzt als Thesis das Daseyn eines Parallelogrammes voraus. Euclides versteht in diesem Satze unter Parallelogramm jenes Viereck, in welchem die sich entgegenstehenden Seiten mit einander gleichlaufend sind, ohne die Gleichheit dieser Seiten oder jene der sich gegenüberliegenden Winkel dabei vorauszusetzen. Ein Parallelogramm in diesem Sinne kann nun folgendergestalt construirt werden. Man lege an BC in B die BA unter einen beliebigen Winkel und in C die CD so, daß ∠ BCD = ∠ CBA ist. Wird nun durch B eine beliebige gerade Linie BD und durch C die CA mit DB gleichlaufend gezogen, so entsteht ein Viereck, worin BA mit DC und BD mit AC parallel ist. — Daß nun in einem solchen Vierecke die Gegenseiten und Gegenwinkel einander gleich sind, wird vollkommen streng in dem 34. Satze bewiesen.

b) Dieses Parallelogramm ABDC wird indessen von der Diagonale BC nicht bloß halbirt, sondern in zwei unter sich congruente Dreiecke BAC und BDC getheilt. Wie umgekehrt aus zwei congruenten Dreiecken ein Parallelogramm entstehen kann, ist bereits oben (LX, a.) entwickelt worden.

c) Auch läßt sich leicht umgekehrt zeigen, daß, wenn in dem Vierecke BACD die Seite BA = DC und BD = AC ist, nun auch BA mit DC und BD mit AC parallel, so wie auch ∠ A = D und ∠ DBA = ∠ DCA seyn muß.

d) Allein wie folgt aus der Gleichheit der Gegenwinkel eines Vierecks, die Gleichheit seiner Gegenseiten und ihr Parallelismus? Es sei (Fig. 274.) BACD ein solches Viereck, worin ∠ BDC = ∠ A und ∠ DBA = ∠ DCA ist. Zieht man BC, so entstehen die beiden Dreiecke DBC und BCA und es ist 2 ∠ BDC + 2 ∠ DBA = 4 R. Zieht man nun aus B auf DC das Loth BE, macht EF = BE und zieht DF, so ist ∠ BDF = 2 ∠ BDC und wenn ED über D nach G verlängert wird, so muß ∠ BDG = ∠ FDG seyn. Da aber 2 ∠ BDC + 2 ∠ BDG = 4 R, so ist auch ∠ BDG = ∠ DBA und daher BA parallel mit DC, woraus denn sowohl die Congruenz der Dreiecke DBC und BCA, als auch der Parallelismus von BD und AC folgt.

Wenn das Loth BE in D oder von D nach G fällt, so wird der Beweis auf ähnliche Art geführt.

Um ein solches Viereck zu construiren, worin ∢ BDC = ∢ A und ∢ DBA = ∢ DCA ist, darf man also nur eines beliebigen Winkels BDC Schenkel CD über D verlängern und nun sowohl den Winkel DBA als DCA dem Winkel BDG gleich machen.

e) Die Wahrheit des vorigen Satzes läßt sich auch auf diese Weise erkennen. Wenn in dem Vierecke ABCD (Fig. 275.) ∢ A = ∢ C und ∢ D = ∢ B ist, so muß auch, weil die Summe dieser vier Winkel auch vier rechte beträgt (wie eine Diagonale AC oder BD lehrt) ∢ A + ∢ D = 2 R und folglich AB mit DC gleichlaufend seyn. Ebenso ist auch ∢ D + ∢ C = 2 R und AD parallel mit CB. Hieraus folgt nun das Weitere von selbst.

LXII. Zum 35. und 36. Satze. a) Ausser der hier von Euclides bemerkten Lage der beiden Parallelogramme können bekanntlich noch die beiden folgenden (Fig. 276 und 277.) Statt finden. Dort ist BD, als Diagonale des ersten Parallelogrammes ADCB, zugleich auch Seitenlinie des zweiten DFCB. Hier aber fällt BE, als Seitenlinie des zweiten, so, daß sie aus dem ersten ein Dreieck AEB und ein Paralleltrapez EDCB bildet.

Im ersten Falle ist △ ADB ≡ △ DBC und eben so auch △ DFC ≡ △ DBC; folglich auch △ ADB + △ DBC = △ DFC + △ DBC.

Im zweiten Falle ist, wegen AB = DC; EB = FC und AE = DF, auch △ EAB ≡ △ FDC; folglich auch △ EAB + DEBC = △ FDC + DEBC.

b) Dieser 35. Satz kann auch so ausgedrückt werden: Parallelogramme, welche auf einerlei Grundlinie stehen und gleiche Höhe haben, sind gleich an Fläche. Denn Parallellinien sind gleichweit abstehende Linien.

c) Auch ist es leicht, jedes schiefwinkelige Parallelogramm in ein ihm gleiches Rechteck zu verwandeln, welches auf derselbigen Grundlinie steht; eben so auch in ein anderes, welches einen gegebenen spitzen oder stumpfen Winkel und dieselbige Grundlinie hat.

d) Auch läßt sich folgender Satz leicht beweisen: Wenn zwei gleiche Parallelogramme auf einerlei Grundlinie stehen, so haben sie auch einerlei Höhe. Es sei (Fig. 278.) ABCD = EFCD und beide auf der Grundlinie DC stehend, so haben beide auch einerlei Höhe. Wenn die über B verlängerte AB nicht in die EF fällt, so muß sie unter EF, wie JK oder über EF, wie GH fallen. Im ersten Falle wäre JKCD = ABCD und folglich auch JKCD = EFCD, welches unmöglich ist. Im zweiten Falle müßte GHCD = ABCD und folglich auch GHCD = EFCD seyn, was ebenfalls widersprechend ist.

Ganz auf ähnliche Art wird auch bewiesen, daß gleiche Parallelogramme von gleichen Höhen auch gleiche Grundlinien haben müssen.

e) Der 36. Satz ist eigentlich nicht wesentlich verschieden vom nächstvorhergehenden, indem der Unterschied, welchen Euclides zwischen Parallelogrammen, welche auf einerlei Grundlinie stehen und zwischen solchen, welche gleiche Grundlinien haben, kein wesentlicher ist. Denn wenn auch das Parallelogramm EHGF nicht unmittelbar auf der Grundlinie BC, sondern auf der von BC getrennten Grundlinie FG = BC steht, so ist es leicht, an CB in B einen Winkel zu legen, welcher = ∡ GFE ist und dann das Parallelogramm EHGF über BC zu stellen, wodurch der Beweis über die Gleichheit wie zuvor geführt wird.

f) Wenn (Fig. 279) ABCD ein Rechteck über der Grundfläche DC und AJ mit DC gleichlaufend ist, so wird, wenn EF = GH gemacht und ED, FC, GD, HC gezogen wird, ABCD = EFCD = GHCD seyn. Da aber DE > DA und DG > DE ist, so ist der Umfang dieser gleichen Parallelogramme immer größer, je schiefer ihre Seitenlinien sind; so zwar, daß derselbe jede gegebene Linie übertreffen kann.

LXIII. Zum 37. Satze. Daher kann jedes gegebene Dreieck in ein ihm gleiches von derselbigen Grundlinie verwandelt werden, worin sich ein bestimmter Winkel an der Grundlinie befinden soll. Auch kann man auf diese Art jedes schiefwinkelige Dreieck in ein ihm gleiches rechtwinkeliges verwandeln, wozu die Zeichnungen leicht entworfen werden können.

LXIV. Zum 38. Satze. a) Der Beweis dieses Satzes kann leicht dadurch auf den Beweis des jüngst vorhergehenden zurückgeführt werden, daß man durch A eine willkührliche Parallele AH mit BC zieht, an B der Grundlinie CB einen ∠ CBA = ∠ FED liegt und hierdurch über BC das Dreieck EFD stellt.

b) Sollte ein gegebenes Dreieck ABC (Fig. 280.) in zwei gleiche Theile getheilt werden, so halbire man seine Grundlinie BC in D und ziehe AD, so muß △ ABD = △ ACD seyn. Auf ähnliche Art kann dasselbe in 4, 8, 16 .... 2e gleiche Theile getheilt werden; nicht aber in 3, oder 5, oder 6 ... gleiche Theile.

c) Auch kann man leicht ein Dreieck bilden, welches 2, 3, 4, 5 .... nmal größer als ein gegebenes ist. Es darf nur die verlängerte Grundlinie des gegebenen Dreiecks 2, 3, 4, 5 .... nmal größer gemacht und von seiner Spitze nach dem Anfangs- und Endpuncte derselben eine gerade Linie gezogen werden.

d) Auch läßt sich dieser Satz so aussprechen: Dreiecke von einerlei Grundlinie und einerlei Höhe sind gleich am Flächeninhalte.

LXV. Zum 39. Satze. a) Dieser Satz heißt auch so: Wenn gleiche Dreiecke gleiche Grundlinien haben, so haben sie auch gleiche Höhen, und kann leicht dadurch bewiesen werden, daß jedes Dreieck die Hälfte eines Parallelogramms von derselbigen Grundlinie und Höhe des Dreiecks ist.

b) Wenn man die zwei Seiten AB und AC (Fig. 281.) eines Dreiecks ABC in D und E halbirt und die gerade DE zieht, so muß diese mit der dritten Dreiecksseite BC parallel seyn. Denn wenn DC und EB gezogen werden, so ist △ EDB = △ ADE und △ DEC = △ ADE, folglich auch △ EDB = △ DEC und daher, weil beide auf der Grundlinie DE stehen, auch DE mit BC gleichlaufend.

LXVI. Zum 40. Satze. a) Dieser Satz setzt, gleich dem 36. Satze, voraus, daß die Grundlinien der gleichen Dreiecke in derselbigen geraden Linie liegen. Ausser der Lage, welche Euclides angibt, könnte auch der Punct C der Grundlinie CE entweder zwischen B und C oder auch erst in die über C verlängerte Linie BC fallen. Der Beweis ist immer ein ähnlicher.

b) Wenn auf die Grundlinie BC ein Dreieck construirt wird, welches dem Dreiecke DCE congruent ist, und dessen Spitze ebenfalls oberhalb BC liegt, so kann dieser Satz auf den jüngst vorhergehenden zurückgeführt werden.

LXVII. Zum 41. Satze. a) Auf Anwendung dieses Satzes beruht die Verwandlung eines gegebenen Dreiecks in ein ihm gleiches Parallelogramm von der nämlichen Höhe. Man darf nämlich nur dem zu bildenden Parallelogramme eine Grundlinie geben, welche halb so groß als jene des Dreiecks ist. Auch kann das zu construirende Parallelogramm einen gegebenen Winkel haben.

b) Soll umgekehrt ein gegebenes Parallelogramm in ein ihm gleiches Dreieck von derselbigen Höhe verwandelt werden, so gebe man dem Dreiecke eine Grundlinie, welche noch einmal so groß, als jene des Parallelogrammes ist und vollende dasselbe wie gewöhnlich. Auch kann das zu bildende Dreieck einen gegebenen Winkel erhalten.

c) Es sei (Fig. 282.) ABC ein gegebenes Dreieck und AJ, als Loth von A auf BC, seine Höhe. Wird nun JA über A verlängert, AE = AJ gemacht, durch E mit BC eine gleichlaufende KEF gezogen, in ihr ein beliebiger Punct D genommen und DB nebst DC gezogen, so ist Δ DBC = 2 Δ ABC. Denn wenn man DF = BC macht und FC zieht, ferner durch A die AL mit BC parallel zieht, AG = BC nimmt und GC zieht, so ist, wie man leicht erkennt, Parallelogramm DMNF $\cong$ Parallelogramm MBCN. Allein MBCN = ABCN; folglich auch ABCG = $\frac{1}{2}$ DBCF. Es ist aber Δ ABC = $\frac{1}{2}$ ABCG und Δ DBC = $\frac{1}{2}$ DBCF; foglich muß auch Δ ABC = $\frac{1}{2}$ Δ DBC seyn.

Wenn also ein Dreieck oder auch ein Parallelogramm mit einem andern gleiche Grundlinie, aber eine noch einmal so große Höhe hat, so ist es noch einmal so groß an seiner Fläche.

d) Daher ist es leicht, ein Parallelogramm oder ein Dreieck in ein anderes zu verwandeln, welches 2, 3, 4 .... n mal größer oder kleiner als ein gegebenes ist. Auch kann das zu construirende noch einen gegebenen Winkel enthalten.

e) Auch läßt sich ein gegebenes Dreieck dadurch in ein ihm gleiches Parallelogramm von der nämlichen Grundlinie verwandeln, daß man die Höhe desselben der Hälfte der Höhe des Dreiecks gleich macht. Sollte aber ein Parallelogramm in ein ihm gleiches Dreieck von der nämlichen Grundlinie verwandelt werden, so müßte die Höhe des Dreiecks noch einmal so groß als jene des Parallelogrammes seyn.

f) Ueberhaupt ist es leicht, mehrere Parallelogramme oder Dreiecke von gleicher Höhe oder von gleicher Grundlinie in ein einziges Parallelogramm oder Dreieck zu verwandeln, welches allen zusammengenommen gleich ist und mit ihnen die Grundlinie oder die Höhe gemein hat. Alles dieses kann leicht durch Zeichnungen erläutert werden.

g) Wenn (Fig. 283) ABCD ein Paralleltrapez ist, so verlängere man DC über C, nehme CE = AB und ziehe BE, so ist △ BCE = △ ABD; folglich auch △ BDE = ABCD. Daher ist jedes Paralleltrapez einem Dreiecke gleich, dessen Grundlinie die Summe der beiden Parallelseiten und dessen Höhe der Abstand eben dieser Seiten ist. Auch sind alle Paralleltrapeze von gleichen Parallelseiten und Höhen gleich am Flächeninhalte, wenn schon ihre Seitenlinien sehr verschiedene Neigungen haben.

h) Soll daher ein gegebenes Paralleltrapez in ein ihm gleiches Parallelogramm von derselbigen Höhe verwandelt werden, so gebe man demselben eine Grundlinie, welche der halben Summe der Parallelseiten jenes Trapezes gleich ist. Dieses Parallelogramm kann auch sehr leicht ein Rechteck werden.

LXVIII. Zum 42. Satze. Dieser Aufgabe, welche bereits vorhin (LXVII, a.) aufgelöset worden ist, steht die andere zur Seite: Wenn ein Parallelogramm gegeben ist, so soll dasselbe in ein ihm gleiches Dreieck verwandelt werden, worin sich ein bestimmter Winkel befindet, welche ebenfalls schon (LXVII, b.) betrachtet wurde.

LXIX. Zum 43. Satze. a) Dieser Satz wird mit größerer Klarheit so ausgedrückt: Wenn man in einem Parallelogramme

eine Diagonale zieht, in ihr einen willkührlichen Punct nimmt und durch diesen zwei Parallelen mit zwei, einen Winkel bildenden Seiten des Parallelogrammes legt, so sind jene zwei Parallelogramme, wodurch diese Diagonale nicht geht, gleich am Flächeninhalte. Daß die beiden Vierecke, durch welche die Diagonale nicht geht, wirklich Parallelogramme sind, ist leicht aus dem Vorhergehenden zu erkennen.

b) Wenn das Parallelogramm ADCB ein Rechteck ist, so müssen auch die beiden kleinern, einander gleichen Parallelogramme Rechtecke seyn; ist es aber ein Quadrat, so sind diese letztern zwei congruente Quadrate.

LXX. Zum 44. Satze. Auch bemerke man folgende Auflösung dieses, wegen vielfacher Anwendungen, sehr wichtigen Satzes. Wenn (Fig. 284.) das Dreieck ABC in ein ihm gleiches Parallelogramm verwandelt werden soll, dessen Seite = QR und dessen einer Winkel = Q ist, so halbire man BC in H, mache ∢ CHD = ∢ Q, verlängere nun BC über C bis CG = QR, ziehe durch C und G mit DH die Parallelen ECM und FGN, lege durch A mit BG die Parallele AF, welche die eben genannten in D, E und F schneidet, ziehe FC, verlängere sie über C bis sie die über H verlängerte DH in L schneidet und lege nun durch L die LN mit BG parallel, welche die Durchschnittspuncte M und N bildet, so ist CGNM das verlangte Parallelogramm.

Denn es ist CGNM = DECH (43. S.). Allein DECH = Δ ABC; folglich auch CGNM = Δ ABC. Ferner ist auch MN = CG = QR und ∢ CMN = ∢ ECG = ∢ DHC = ∢ Q.

LXXI. Zum 45 Satze. a) Man bemerke hier Folgendes. Wenn in einer geradlinigen Figur aus einem Scheitelpuncte Diagonalen gezogen werden, so kann dieselbe in Dreiecke getheilt werden nach folgendem Gesetze:

Im 4 Ecke gibt 1 Diagonale 2 Dreiecke
» 5 » geben 2 Diagonalen 3 »
» 6 » » 3 » 4 »
» 7 » » 4 » 5 »

Im n Ecke geben n—3 Diagonalen n—2 Dreiecke. Daher müßte im n Ecke diese Verwandlung der Dreiecke in Parallelogramme n—2mal ausgeführt werden.

b) Daher bemerke man dieses. Es sei (Fig. 285.) ABCD ein Trapez, so ziehe man die Diagonale AC, durch B mit AC die Parallele BE, welche die über C verlängerte DC in E schneidet und nun die gerade AE, so ist △ ADE = ABCD. Denn es ist, wegen der Parallelen BE und AC, auch das △ BAC = △ EAC. Um daher das Viereck ABCD in ein Parallelogramm von gegebener Seite und gegebenem Winkel zu verwandeln, darf diese Aufgabe nur in Bezug auf das Dreieck ADE aufgelöset werden.

c) Auf ähnliche Art kann das Fünfeck (Fig. 286.) ABCDE in ein ihm gleiches Dreieck verwandelt werden. Man verlängere CD willkührlich über C und D, ziehe durch B die BF mit AC und durch E die EG mit AD gleich laufend. Wird nun AF und AG gezogen, so ist △ AFG = ABCDE. Denn es ist, wegen △ ACB = △ ACF, auch △ ABN = △ CNF und eben so auch △ AEM = △ MDG.

d) Auch ist es klar, daß durch den 45. Satz jedes gegebene geradlinige Vieleck in ein ihm gleiches Rechteck von gegebener Seite verwandelt werden kann. Die mit dieser in Verbindung stehende Aufgabe: Ein solches Vieleck in ein ihm gleiches Quadrat zu verwandeln, kann aber hieraus noch nicht abgeleitet werden. Doch wird diese Aufgabe nun bald folgen.

LXXII. Zum 46. Satze. a) Die Construction des Quadrates, dessen Seite gegeben ist, ist bereits oben (LX, d.) nachgewiesen worden bei Entstehung der verschiedenen Arten der Parallelogramme. Wenn Euclides in der Auflösung aus dem Endpuncte A der gegebenen Linie BA ein Loth AC errichtet und sich hierbei auf den 11. Satz bezieht, so ist klar, daß diese Auflösung dort nicht vorkömmt, weil dort der Punct A kein Endpunct der gegebenen Linie ist. Wenn indessen BA über A willkührlich verlängert wird, so ist diese Auflösung auf die

vorige zurückgeführt. Eine Auflösung ohne Verlängerung der BA ist oben (LIX, g.) gegeben worden.

b) Wenn es ferner heißt, man solle durch D die DE mit AB und durch B die BE mit AD parallel ziehen, so ist die Auflösung dieser Aufgabe bereits früher (31. Satz.) gelehrt worden, allein daß beide Parallelen sich in einem Puncte E durchschneiden müssen, wird stillschweigend angenommen. Der Beweis hievon ist einfach dieser. Da DE mit AB und BE mit AD parallel, auch $\measuredangle A = R$ ist, so muß auch $\measuredangle$ ADE $=\measuredangle$ ABE $= R$ seyn. Denkt man sich nun die Linie DB, so muß $\measuredangle$ BDE $+\measuredangle$ DBE < 2 R seyn und folglich müssen die Linien DE und BE sich einmal durchschneiden.

c) Daß gleiche Linien auch congruente Quadrate bilden, so wie auch umgekehrt congruente Quadrate gleiche Seiten haben müssen, läßt sich sehr leicht durch wirkliche Construction direct und auch indirect nachweisen.

LXXIII. Zum 47. Satze. a) Dieser Satz, einer der wichtigsten der Elementargeometrie, wird auch der Pythagoräische Lehrsatz genennt, weil man dem Pythagoras seine Erfindung zuschreibt. Clavius bemerkte hierüber (Euclidis Elementorum Libri XV etc. Francofurti 1607, pag. 151) Folgendes: « Inventio porro admirabilis, atque pulcherrimi « hujus theorematis ad Pythagoram refertur, qui, ut scribit « Vitruvius Libr. 9. c. 2. Hostias Musis immolavit, quod « se in tam praeclaro invento adjuverint. Sunt qui « putent, eum immolasse centum boves: si tamen « Proclo credendum est, unum tantummodo obtulit. « Fortasse autem Pythagoras, ut nonnulli volunt, ex nume- « ris occasionem sumpsit, ut theorema hoc investigaret. « Cum enim hos tres numeros 3, 4, 5 diligenter esset con- « templatus, vidissetque quadratum numerum majoris « aequalem esse quadratis numeris reliquorum, composuit « triangulum scalenum, cujus maximum latus divisum erat « in 5 partes aequales, minimum in 3 ejusdem magnitu- « dinis et medium in 4. Quo facto, consideravit angulum « sub his duobus lateribus contentum, invenitque eum

« esse rectum. Idque in quamplurimis aliis numeris, ut « in 6, 8, 10 et 9, 12, 15 etc. observavit. Quare inquiren- « dum esse judicavit, num in omni triangulo rectangulo qua- « dratum lateris, quod recto angulo opponitur, reliquorum « laterum quadratis aequale esset, quandoquidem ommia « triangula quorum latera habebant magnitudinem secundum « dictos numeros, continebant unum angulum rectum. Atque « ita tandem mirabile hoc theorema maxima animi voluptate « adinvenit, firmaque ratione demonstravit. Quod tamen « Euclides mirandum in modum amplivicavit Lib. 6. prop. « 31, ubi demonstravit, non solum quadratum lateris, « quod angulo recto opponitur, aequale esse quadratis « reliquorum duorum laterum, verum etiam figuram quam- « libet rectilineam super latus recto angulo oppositam « constructam, sive ea sit triangulum, sive quadrangulum « etc. aequalem esse duabus figuris, quae super reliqua « latera describuntur, dummodo priori sint similes, simili- « terque descriptae, ut ibidem ostendemus. »

Cicero ſagt (De Natura Deorum, l. III. c. 36) Folgen- des: « Pythagoras, cum in Geometria quiddam novi inve- « nisset, Musis bovem immolasse dicitur. Sed id quidem « non credo, quoniam ille ne Apolloni quidem Delio « hostiam immolare voluit, ne aram sanguine adspergeret.»

Des Vitruvius oben bemerkte Stelle iſt dieſe: « Item « Pythagoras normam sine artificis fabricationibus in- « ventam ostendit, et quam magno labore fabri normam « facientes vix ad verum perducere possunt. Id rationibus « et methodis emendatum ex ejus praeceptis explicatur « Namque in sumantur regulae tres, e quibus una sit pedes « tres, altera quatuor, tertia pedes quinque haeque regulae « inter se compositae tangant alia aliam suis cacuminibus « extremis, schema habentes trigoni, deformabunt nor- « mam emendatam. Ad eas autem regularum singularum « longitudines, si singula quadrata paribus lateribus descri- « bantur, quod erit pedum trium latus, areae habebit « pedes novem, quod erit quatuor, sexdecim; quod

« quinque erit, viginti quinque. Ita quantum areae pedum « numerum duo quadrata ex tribus pedibus longitudinis « laterum et quatuor efficiunt, aeque tantum numerum « reddit unum ex quinque descriptum. Id Pythagoras « cum invenisset, non dubitans a Musis se in ea inventione « monitum, maximas gratias agens, hostias dicitur iis « immolasse. »

b) Die Behauptung des 47. Satzes läßt die Lage der über die drei Seiten des rechtwinkeligen Dreiecks beschriebenen Quadrate unentschieden. Euclides führt den Beweis an jener Lage, nach welcher jedes dieser Quadrate ganz ausserhalb des Dreieckes fällt. Da es nun intressant ist, den Beweis auch bei den übrigen noch möglichen Lagen dieser Quadrate auf ähnliche Weise zu führen, so hat der Verfasser Dieses alle hier möglichen Fälle in einer eignen Abhandlung entwickelt (Der Pythagoräische Lehrsatz, mit 32 theils bekannten, theils neuen Beweisen. Zweite, mit einigen Beweisen vermehrte, Auflage. Mainz, 1821. XII u. 48. S. 4). Man überzeugt sich bald, daß überhaupt acht verschiedene Lagen möglich sind. Nennt man das kleinste Quadrat A, das mittlere B, das größte C, so sind es folgende:

1. Sowohl A als B und C fallen nach Aussen, wie bei Euclides.
2. A fällt nach Innen, B und C aber nach Aussen.
3. B fällt nach Innen, A und C nach Aussen.
4. C fällt nach Innen, A und B nach Aussen.
5. A und B fällt nach Innen, C nach Aussen.
6. B und C fällt nach Innen, A nach Aussen.
7. A und C fällt nach Innen, und B nach Aussen.
8. A, B und C fällt nach Innen.

c) Zur Erläuterung folgt hier der Beweis über die dritte Lage. Zieht man (Fig. 287.) die KD, so ist, wegen ∢ BAK = ∢ CAD = R und ∢ CAK = ∢ CAK, auch ∢ BAC = ∢ KAD; ferner ist AB = AK, AC = AD, folglich △ ABC ≅ △ AKD und ∢ AKD = ∢ ABC = R. Da auch ∢ AKL = R, so ist DKL eine gerade Linie d. h. die über K verlängerte LK muß in D eintreffen.

Zieht man nun aus B auf AC das Loth BM, verlängert es bis R und zieht DB, so ist Δ BAD = ½ Rechteck ADRM und auch Δ BAD = ½ Quadrat AKLB. Folglich ist ADRM = AKLB. Auch geht dieses schon daraus hervor, daß ADRM = ADSB und ADSB = AKLB ist.

Daß aber MREC = BCHF ist, wird hier gerade so wie bei Euclides bewiesen.

Folglich muß ADRM + MREC = AKLB + BCHF seyn.

d) Der Beweis über die achte Lage ist folgender. Wenn (Fig. 288.) ABC das gegebene rechtwinkelige Dreieck ist, und die Quadrate der drei Seiten haben die entgegengesetzte Lage von jener des Euclides, so verlängere man FH bis O und ziehe OB. Hier ist Δ OFB ≅ Δ ABC und daher ∡ FOB = ∡ OBL = ∡ BAC. Da nun ∡ ABM + ∡ MBC = R, so ist auch ∡ ABM + ∡ BAM = R. Daher muß auch ∡ AMB = R und BO lothrecht auf AC seyn. Wird nun OB nach P verlängert, so ist auch ∡ BPE = R und daher so wohl MPEC als MPDA ein Rechteck.

Zieht man nun BE, so muß, weil OB = CE und OB mit CE gleichlaufend ist, OCEB eine Rhomboide seyn, worin Δ OBC ≅ Δ ECB. Es ist aber Δ OBC = ½ HFBC. Daher OBEC = HFBC. Da aber OBEC = MPEC, so ist auch MPEC = HFBC.

Wird nun DB und AO gezogen, so muß, wegen OB = AD, und da OB mit AD parallel ist, auch OBDA eine Rhomboide seyn, und es ist Δ AOB ≅ Δ ADB. Allein Δ AOB = ½ AKLB und Δ ADB = ½ AMPD; folglich AKLB = AMPD. Daher wird nun FHCB + AKLB = ADPM + MCED = ACED.

e) Ein Engländer, Henry Boad, hat in seinem Lehrbuche der Geometrie (London 1733) folgenden eigenthümlichen Beweis dieses Satzes mitgetheilt. Es sei (Fig. 289.) ABC das gegebene rechtwinkelige Dreieck und ADEC, AKLB und FHCB die Lage der drei Quadrate seiner Seiten, so muß die über K verlängerte LK in D eintreffen. Denn wenn man DK zieht, so ist, wegen DA = AC, KA = AB und ∡ DAK = ∡ CAB, auch Δ DAK ≅ Δ CAB, daher ∡ DKA = ∡ ABC = R und somit DKL eine gerade Linie.

Nun ziehe man durch D die MP mit AK, durch E die PS mit KL parallel, welche sich in P schneiden müssen und verlängere BA in M, und BL in S, so ist MPSB ein Quadrat. Denn, wegen ∢ B = R, muß ∢ M = ∢ P = ∢ S = R seyn und, wegen △ DKA ≅ △ CBA ≅ △ AMD ≅ △ DPE ≅ △ ESC (wie man leicht findet) ist, auch BM = MP = PS = SB. Eben ist so klar, daß, nachdem AK nach V verlängert wird, DPVK ein Quadrat und DPVK ≅ FHCB, auch Rechteck MDKA ≅ Rechteck VSLK sei.

Nimmt man nun vom Quadrate MPSB die Quadrate der beiden Catheten AKLB und FHCB d. h. AKLB und DPVK hinweg, so bleiben die beiden Rechtecke MDKA und VSLK zum Reste. Wird aber von eben diesem Quadrate MPSB das Quadrat der Hypotenuse ADEC weggenommen, so bleiben die vier congruenten Dreiecke AMD, DPE, ESC und CBA übrig, welche zusammen der Summe der eben genannten Rechtecke gleich sind, weil △ AMD = ½ AMDK. Daher muß ADEC = AKLB + FHCB seyn.

Man sieht leicht, daß dieser Beweis auf folgender Schlußform beruht: Wenn A — B = D und A — C = D ist, so muß auch B = C seyn.

Für die übrigen noch möglichen sieben verschiedenen Lagen der Quadrate habe ich diesen Beweis in der oben (b.) angeführten Abhandlung gegeben.

f) Noch ein anderer, höchst einfacher und sinnreicher Beweis, dessen Erfindung man Joh. Tob. Mayer in Göttingen zuschreibt, ist folgender. Es sei (Fig. 290.) ABC das rechtwinkelige Dreieck, dessen Seiten-Quadrate wie bei Euclides beschrieben sind, so ziehe man HJ nebst den Diagonalen GC und KC, welche, wie leicht zu beweisen ist, eine gerade Linie bilden. Ferner lege man an FD das Dreieck ACB in verkehrter Lage FED und ziehe CE.

Hier ist leicht zu beweisen, daß das Viereck CAFE dem Vierecke GABK und das Viereck GHJK dem Vierecke CBDE congruent sei. Folglich ist das Sechseck GABKJH dem Sechsecke ACBDEF an Fläche gleich. Nimmt man von jenem die zwei

congruenten Dreiecke ACB und HCJ, von diesem aber die zwei ebenfalls congruenten Dreiecke ACB und FED hinweg, so bleiben im ersten Falle die Quadrate der beiden Catheten und im zweiten Falle bleibt das Quadrat der Hypotenuse übrig. Folglich sind diese Reste ebenfalls gleich.

g) Weil das gleichseitige Dreieck die einfachste regelmäßige Figur ist, so leitete dieses den Verfasser des Gegenwärtigen auf den Gedanken, über jede der drei Seiten eines rechtwinkeligen Dreieckes ein gleichseitiges Dreieck zu beschreiben und nun zu beweisen, daß das über der Hypotenuse construirte so groß sei, als die zwei andern zusammengenommen. Der Beweis ist dieser. Es sei (Fig. 291.) ABC das rechtwinkelige Dreieck und ACD, ABE, BCF jedes der drei gleichseitigen Dreiecke, so ziehe man aus D das Loth DO auf AC, wodurch AO = CO wird. Zieht man nun BO, so ist auch BO = AO = OC und sowohl AOB als BOC ein gleichschenkeliges Dreieck. Zieht man nun die Verbindungslinien EO und FO, so muß jene die AB, diese die BC halbiren und auf ihr lothrecht stehen. Auch ist EO mit BC und FO mit BA parallel.

Zieht man nun die geraden DB, EC und AF, so ist, weil AD = AC, AB = AE und ∢ DAB = ∢ CAE, auch △ DAB ≅ △ CAE. Auf ähnliche Art wird bewiesen, daß △ BCD ≅ △ FCA und △ BFA ≅ △ CBE ist.

Da ferner OF mit AB parallel ist, so muß △ ABF = △ ABO und folglich △ BJF = △ OJA seyn. Setzt man beiderseits das Viereck JOCF hinzu, so ist Viereck OBFC = △ ACF = △ BCD. Nun ist aber Viereck OBFC = △ BOC + △ BFC = △ BEC + △ BFC; daher auch △ BEC + △ BFC = △ BCD. Setzt man zu jener Summe das Dreieck CAE und zu △ BCD das jenem gleiche △ DAB, so ist Fünfeck CAEBF = Viereck DABC. Nimmt man das diesen beiden Figuren gemeinschaftliche Dreieck ABC hinweg, so bleibt △ AEB + △ BFC = △ ADC welches der zu beweisende Lehrsatz ist.

Noch kann man als interessante Eigenschaft dieser drei geraden Linien AF = BD = CE bemerken, daß sie sich in einem Puncte durchschneiden, um welchen sie sechs gleiche Winkel

bilden, deren jeder $= 2/3$ R ist. Den Beweis hievon aufzufinden, ist eine lehrreiche Uebung in der Geometrie. Eine weitere Ausführung davon sehe man in der oben (zu b) bemerkten Abhandlung.

h) Endlich verdient noch folgender Lehrsatz, von welchem der Pythagoräische Satz eine leichte Folgerung ist, hier angeführt zu werden. Man findet ihn bei Pappus, jedoch in einer etwas andern Gestalt. Es sei ACB (Tafel XVI, Fig. 125, a.) ein beliebiges Dreieck, CFKB ein willkührliches Parallelogramm über CB und CEJA ein solches über CA, so müssen die über F und E verlängerten Linien KF und JE sich einmal in D schneiden, weil sich BC und AC in C geschnitten haben. Auf gleiche Art müssen die über K und J verlängerten DK und DJ die beiderseits verlängerte AB in M und L schneiden.

Zieht man nun die gerade DCN und durch B und A die mit ihr gleichlaufenden BH und AG, nebst der Verbindungslinie GH, so ist GHBA ein Parallelogramm. Denn es ist GA = DC (Parallelen zwischen Parallelen) und HB = DC, folglich auch GA = HB. Da nun noch GA mit HB parallel ist, so muß GHBA ein Parallelogramm seyn. Auch ist noch ON = GA = HB = DC.

Nun ist BCFK = BCDH allein
BCDH = BHON (I. B. 36. S.)
folglich BCFK = BHON

Auf gleiche Art ist ferner
ACEJ = ACDG und
ACDG = AGON,
daher ACEJ = AGON;
folglich BCFK + ACEJ = BHON + AGON = ABHG.

Da nun dieser Satz von jedem Dreiecke ACB gilt, es sei $\measuredangle C = R$ oder $\measuredangle C < R$, oder $\measuredangle C > R$, und von jedem über AC und BC beschriebenen Parallelogramme, so ist er auch für den besondern Fall bewiesen, in welchem $\measuredangle C = R$ ist und über AC und BC zwei Quadrate beschrieben sind.

Es sei nämlich (Fig. 125, b.) ACB ein rechtwinkeliges Dreieck, BCFK das Quadrat über BC und ACEJ jenes über

AC, so müssen die über F und E verlängerten Linien KF und JE sich so in D schneiden, daß ∢ JDK = R ist. Wird nun durch D und C die gerade DCN gezogen, so ist zu beweisen, daß sie auf AB lothrecht steht. Es ist nämlich, wegen BC = CF, AC = CE = FD und ∢ BCA = ∢ CFD = R, auch △ ACB ≅ △ DFC und ∢ CDF = ∢ CAB. Allein ∢ DCF = ∢ ACN, folglich ∢ CAN + ∢ ACN = ∢ CDF + ∢ DCF = R und somit auch ∢ CNA = R.

Zieht man nun BH und AG mit DN gleichlaufend und die Verbindungslinie GH, so ist zu zeigen, daß ABHG das Quadrat der Hypotenuse ist. Da ∢ HBA = R = ∢ KBC, so ist auch ∢ ABC = ∢ HBK und, wegen BC = BK, ∢ BCA = ∢ BKH = R, nun auch △ ACB ≅ △ KHB, und somit AB = BH. Auf ganz ähnliche Art wird bewiesen, daß auch das Loth AG = AB ist. Daher muß ABHG das Quadrat der Hypotenuse und zugleich = BCFK + ACEJ seyn.

Sollen daher irgend zwei Parallelogramme (Fig. 125, a.) BCFK und ACEJ in ein einziges, welches ihrer Summe gleich ist, verwandelt werden, so setze man sie unter einem beliebigen Winkel ACB zusammen, verlängere KF, JE nach D, ziehe DCN, die BH und AG mit ihr gleichlaufend und endlich GH, so ist GHBA = BCFK + ACEJ.

Ganz auf ähnliche Art können auch 3, 4, 5 und mehrere gegebene Parallelogramme in ein einziges verwandelt werden, welches allen zusammen genommen gleich ist.

i) Nun ist es leicht, zwei oder mehrere Quadrate in ein einziges Quadrat zu verwandeln, welches ihnen zusammen genommen gleich ist. Um die Quadrate (Taf. XII, Fig. 292.) ABCD und CFGH in ein ihnen gleiches zu verwandeln, setze man sie mit ihren Seiten BC und CF unter einem rechten Winkel BCF zusammen und ziehe BF, so ist, wenn man das Quadrat BJKF construirt, BJKF = ABCD + CFGH.

Denkt man sich (Fig. 293.) AB und BC unter einem rechten Winkel ABC verbunden und AC gezogen, so ist das Quadrat von AC den Quadraten von AB und von BC zusammen gleich. Errichtet man CD auf AC, DE auf AD, EF auf AE lothrecht und

zieht AF, so ist das Quadrat von AF so groß als die Summe der Quadrate von AB, BC, CD, DE und EF.

k) Soll ein Quadrat gebildet werden, welches dem Unterschiede der Quadrate von AC und BC (Fig. 294.) gleich ist, so errichte man BD lothrecht auf CB und beschreibe mit CA einen Bogen, welcher BD in A schneidet. Hier ist das Quadrat von AC dem Quadrate von AB und BC zusammen, folglich das Quadrat von AB dem Unterschiede der Quadrate über AC und über BC gleich.

l) Um die Hälfte eines Quadrates in ein Quadrat zu verwandeln, sei (Fig. 295.) AB die Seite des gegebenen Quadrates. Wird AB in C halbirt, CD = CA = CB lothrecht auf AB und AD, BD gezogen, so ist Δ ACD $\cong$ Δ BCD, folglich AD = BD und, wie man leicht findet, auch $\sphericalangle$ ADC = $\sphericalangle$ BDC = $^1/_2$ R, somit $\sphericalangle$ADB = R. Daher muß das Quadrat von AD der Hälfte des Quadrats von AB gleich seyn.

Auf ähnliche Art können nun auch Quadrate construirt werden, welche $^1/_4$, $^3/_4$, $^5/_4$, $^7/_4$, $^1/_8$, $^3/_8$, $^5/_8$, $^7/_8$ u. s. w. eines gegebenen sind; nicht aber $^1/_3$, $^2/_3$, $^1/_5$, $^2/_5$, $^3/_5$ u. s. f. desselben.

LXXIV. Zum 48. Satze. a) Dieser Satz, welcher der umgekehrte des 47. Satzes ist, kann auch auf folgende Art indirect erwiesen werden. Wenn (Fig. 296.) in dem Dreiecke BCA das Quadrat von AB den beiden Quadraten von BC und CA zusammengenommen gleich und $\sphericalangle$ ACB kein rechter ist, so muß er kleiner oder größer als derselbe seyn.

Für $\sphericalangle$ ACB < R, sei $\sphericalangle$ ACE = R, so müßte, wenn CE = CB gemacht und AE gezogen wird Quadr. AE = Quadr. AC + Quadr. CE seyn. Da aber Quadr. AB = Quadr. AC + Quadr CB (= Quadr. CE) so wäre auch Quadr. AE = Q. AB, welches nicht möglich ist, da AE > AB (24. S.) seyn muß, woraus Quadr. AE > Quadr. AB folgt.

Für $\sphericalangle$ ACB > R, sei $\sphericalangle$ ACD = R und CD = CB, so ist, wenn AD gezogen wird, Quadr. AD = Quadr. AC + Quadr. CD, und es müßte hier, wie man leicht erkennt, Quadr. AD = Quadr. AB seyn, welches widersprechend ist, weil AD < AB (24. S.) seyn muß.

b) Auch lassen sich auf ähnliche Art folgende Sätze beweisen:

1. In jedem spitzwinkeligen Dreiecke ist das Quadrat einer Seite kleiner als die Summe der Quadrate der beiden übrigen Seiten zusammengenommen.
2. Wenn in einem Dreiecke das Quadrat einer Seite kleiner ist als die Summe der Quadrate der beiden übrigen Seiten, so ist der, jener ersten Seite gegenüberliegende Winkel ein spitzer.
3. In jedem stumpfwinkeligen Dreiecke ist das Quadrat der, dem stumpfen Winkel gegenüberliegenden Seite größer als die Summe der Quadrate der zwei übrigen Seiten.
4. Wenn in einem Dreiecke das Quadrat einer Seite größer ist, als die Summe der Quadrate der zwei übrigen Seiten, so ist der, jener Seite entgegenliegende Winkel ein stumpfer.

Anmerkungen
zum
zweiten Buche des Euclides.

LXXV. Zur 1. Erklärung. a) Aus dem Bisherigen ist bekannt, daß die Gestalt und Größe eines Rechtecks bestimmt sei, wenn zwei Seiten desselben gegeben sind; auch ist es leicht, ein solches Rechteck aus diesen Linien zu construiren, so wie schon eine gegebene Linie zur Construction des Quadrates hinreicht. Die in diesem Buche entwickelten Lehren setzen diese Constructionen zum voraus und alle Beweise sind ebenfalls hierauf gebaut. Da aber diese Beweise noch auf einem andern (arithmetisch-geometrischen) Wege gegeben werden können, so sollen hier einige Hülfslehren dazu vorgetragen werden.

b) Unter Messen versteht man nichts anderes, als bestimmen, wie oft eine als Einheit genommene Größe in einer andern, ihr gleichartigen enthalten ist. Die Größe, womit man die andere ausmißt, wird das Maß derselben genennt. Da das Maß und die zu messende Größe gleichartig seyn müssen, so können Linien nur durch Linien und Flächen nur durch Flächen gemessen werden.

c) Wenn zwei gerade, willkührlich große Linien gegeben sind, so haben sie entweder ganz genau ein gemeinschaftliches Maß oder sie können so genau ausgemessen werden, daß der Fehler kleiner als jede anzugebende Linie ist. Denn wenn (Fig. 297.) AB und CD die gegebenen Linien sind, und AB $>$ CD ist, so ist entweder die größere AB gerade ein Mehrfaches der kleinern CD, oder nicht. Im ersten Falle ist CD selbst das gemeinschaftliche Maß von beiden. Im zweiten Falle nehme man $\frac{1}{2}$ CD $=$ CE als Maß an, so ist dieses entweder genau

in AB enthalten oder nicht. In jenem Falle haben beide Linien die CE zum gemeinsamen Maße; in diesem ist der Unterschied kleiner als CE = 1/2 CD.

Fährt man so fort, die CD in 4, 8, 16, 32, 64, 128 u. s. f. gleiche Theile zu theilen, so ist jeder derselben ein genaues Maß von CD und, wenn er nicht auch ein genaues Maß von AB ist, so muß der Unterschied doch weniger als die Größe des Maßes selbst betragen.

Da aber dieses Maß, durch fortgesetztes Halbiren, kleiner als jede gegebene Linie wird, so muß auch der Ueberschuß bei dem Messen kleiner als jede Linie werden d. h. die Linien AB und CD können entweder vollkommen genau oder so scharf mit einerlei Maß gemessen werden, daß der Fehler hierbei kleiner wird, als jede anzugebende noch so kleine Linie.

Auf ähnliche Art wird gezeigt, daß auch drei oder mehrere gegebene gerade Linie ein gemeinsames Maß haben.

d) Nun sei (Fig. 298.) ABCD ein gegebenes Quadrat und DE das Maß seiner Seite DC; so, daß DE genau viermal in DC enthalten ist. Beschreibt man über DE das kleine Quadrat DEFG, so ist klar, daß dasselbe von D nach C viermal in DC und ebenso von D nach A auch viermal in DA kann gestellt werden. Daher wird das Quadrat ABCD durch 4 × 4 = 16 solcher kleinen Quadrate GFED ausgefüllt.

Nennt man GFED das Quadratmaß so enthält ABCD, im Flächeninhalte, 16 solcher Quadratmaße, und es ist klar, daß der Inhalt eines Quadrats gefunden wird, wenn man die Zahl, welche angibt, wie oft das Linienmaß DE in dessen Seite DC enthalten ist, einmal mit sich selbst multiplicirt. Das Product zeigt die Menge der quadratischen Maßtheile seines Flächeninhaltes.

e) Wäre (Fig. 299.) HJKL ein gegebenes Rechteck und das Linienmaß LQ in LK siebenmal und in LH dreimal enthalten, so würde, wie man sehr leicht erkennt, das Quadratmaß NMQL in der Ebene HJKL genau 21 mal enthalten seyn. Daher wird der Flächeninhalt eines Rechteckes gefunden, wenn

man die Zahlen, welche andeuten, wie oft die Seite des Quadratmaßes in jeder seiner zwei Seiten enthalten ist, mit einander multiplicirt. So stellt also ein Product $4 \times 9 = 36$ den Inhalt eines Rechtecks dar, dessen kleinere Seite die Seite des Quadratmaßes 4mal, dessen größere aber diese Seite 9 mal enthält. Im Allgemeinen stellt $a \times b$ den Inhalt eines Rechtecks vor, dessen eine Seite das Maß a mal, die andere aber b mal enthält. Auf ähnliche Art drückt a^2 (bekanntlich ein abgekürzter Ausdruck für $a \times a$)den Inhalt jedes Quadrates aus.

LXXVI. Zur 2. Erklärung. a) Das Gnomon ist also jener Theil des Parallelogramms, welcher entsteht, wenn man in dessen Diagonale BD (Fig. 300.) einen willkührlichen Punct G nimmt, durch diesen die FGE mit AD und die JGK mit DC parallel zieht, und nun entweder das kleinere Parallelogramm FBKG oder das größere JGED vom gegebenen Parallelogramme ABCD wegnimmt. In jenem Fall bleibt das Gnomon FADCKGF und in diesem das Gnomon JABCEGJ. Da nach dem Früheren (I. B. 43. S.) AFGJ = GKCE ist, so besteht jedes Gnomon aus drei Parallelogrammen wovon zwei unter sich einander gleich sind an Fläche. Würde der Punct G in der Mitte von BD genommen, so wären auch die beiden Gnomone gleich an Flächeninhalte. Wäre hierbei das Parallelogramm ABCD noch ein Rechteck oder ein Quadrat, so würden sie auch congruent seyn.

b) Das Wort Gnomon bedeutet auch ein Winkelmaß d. h. ein practisches Werkzeug, um einen rechten Winkel durch Zeichnung zu bilden, und hierdurch ist wohl Euclides bewogen worden, dieses Wort in die Geometrie aufzunehmen. Denn wenn das gegebene Parallelogramm ein Rechteck (Fig. 301.) ABCD ist, so bildet das Gnomon ABCEGHA die Gestalt eines Winkelmaßes.

c) In der Astronomie versteht man unter Gnomon ein Werkzeug, um die Sonnenhöhe zu messen, und in der Lehre von den Sonnenuhren (Gnomonik) wird der Zeiger, welcher durch seinen Schatten die Stunden weiset, ebenfalls Gnomon genennt.

LXXVII. Zum 1. Satze. a) In Bezug auf dasjenige, was oben von der Berechnung des Flächeninhaltes der Rechtecke ist bemerkt worden, läßt sich dieser Lehrsatz auf arithmetisch-geometrische Art beweisen.

Es sei BC = a, BG = A = b, ferner sei BD = c, DE = e, EC = f, so ist, nach der Annahme; a = c + e + f und folglich auch a × b = (c + e + f) × b, oder

a × b = c × b + e × b + f × b. Allein

a × b = Rechteck BCHG,

c × b = Rechteck BDKG,

e × b = Rechteck DELK und

f × b = Rechteck ECHL, folglich Rechteck BCHG = Rechteck BDKG + Rechteck DELK + Rechteck ECHL.

b) Man überzeugt sich leicht, daß dieser Beweis ganz allgemein ist und eben so geführt werden kann, wenn BC in mehrere (und noch soviele) Abschnitte getheilt ist. Wären einige dieser Abschnitte der Linie BG gleich, so entständen durch sie Quadrate, als Theile des Rechtecks BCHG. Erläuterungen in Zahlen sind leicht beizufügen.

LXXVIII. Zum 2. Satze. a) Es sei hier AB = a, AC = b und CB = c, so ist a = b + c und daher auch a × a = (b + c) × a oder a^2 = a × b + a × c. Es ist aber a^2 = Quadrat ABED, ferner a × b = Rechteck ACFD, weil AB = AD und a × c = Rechteck CBEF, weil CF = AD = AB; folglich Quadr. ABCD = Recht. ACFD + Recht. CBEF.

b) Nähme man a = b + c + d + e + f, so würde a^2 = (b + c + d + e + f) × a, oder a^2 = a × b + a × c + a × d + a × e + a × f seyn d. h. das Quadrat von A bestände hier aus der Summe von fünf Rechtecken a × b, a × c, a × d, a × e und a × f. Wäre dabei noch b = c = d = e = f, so würden diese fünf Rechtecke auch noch einander congruent seyn. Auch hier lassen sich leicht Zahlen-Beispiele geben.

LXXIX. Zum 3. Satze. a) Es sei AB = a, AC = b und CB = c, so ist a = b + c. Wird nun beiderseits mit c multiplicirt, so ist a × c = b × c + c^2. Allein a × c =

Recht. ABEF, ferner b × c = Recht. ACDF und c^2 = Quadr. CBED, folglich ist Recht. ABEF = Recht. ACDF + Quadr. CBED.

b) Auf ähnliche Art ist auch das Rechteck aus AB und AC (Fig. 302.) dem Rechtecke aus den beiden Abschnitten AC und CB nebst dem Quadrate des Abschnitts AC gleich. Denn wenn man AF = AC auf BA lothrecht stellt und FE mit AB, so wie BE und CD mit AF gleichlaufend zieht, so ist ABEF das Rechteck aus AB und AC, ferner ist ACDF das Quadrat von AC und CBED das Rechteck von AC und CB.

Setzt man wieder AB = a, AC = b und CB = c, so ist a = b + c und folglich auch a × b = (b + c) × b oder $a \times b = b^2 + b \times c$. Allein a × b = Recht. ABEF, ferner b^2 = Quadr. ACDF und b × c = Recht. CBED; folglich muß Recht. ABEF = Quadr. ACDF + Recht. CBED seyn.

Beispiele in Zahlen sind sehr einfach zu geben.

LXXX. Zum 4. Satze. a) Setzt man AB = a, AC = b und CB = c, so ist a = b + c, folglich $a^2 = (b + c)^2 = b^2 + 2\,b \times c + c^2$. Allein a^2 = ABED; b^2 = HGFD; 2 b × c = 2 ACGH = ACGH + GKEF und c^2 = CBKG; folglich ist auch ABED = HGFD + 2 ACGH + CBKG.

b) Dieses ist der bekannte Hülfssatz zur Ausziehung der Quadratwurzeln, wenn diese Wurzeln zweitheilig sind. Allein wenn (Fig. 303.) AB in drei willkührliche Theile AC, CD und DB getheilt ist, so besteht ihr Quadrat ABEF aus den Quadraten von AC, von CD und von DB, dann aus den zwei Rechtecken von AC und CD, aus den zwei Rechtecken von AC und DB und aus den beiden Rechtecken von CD und DB. Dieses ergibt sich leicht aus Betrachtung der Figur und folgt auch daraus, daß, wenn AB = a, AC = b, CD = c und DB = d gesetzt wird, nunmehr a = b + c + d und folglich $a^2 = (b + c + d)^2 = b^2 + 2\,bc + c^2 + 2\,bd + 2\,cd + d^2$ ist. Hier wird nämlich

b^2 = Quadr. ACLG,

2 bc = Recht. CDML + Recht. GLNH

e^2 = Quadr. LMON
$2\,bd$ = Recht. DBJM + Recht. HNPF
$2\,cd$ = Recht. MJKO + Recht. NOQP
d^2 = Quadr. OKEQ.

c) Auf ähnliche Art könnten auch die Ausdrücke $(b + c + d + e)^2$; $(b + c + d + e + f)^2$ u. s. f. durch Quadrate und Rechtecke construirt werden.

LXXXI. Zum 5. Satze. a) Es sei hier $AB = a$, $AC = CB = b$, $CD = c$, so ist $AD = b + c$ und $DB = b - c$ und man hat

$(b + c) \times (b - c) + c^2 = b^2$, weil
$(b + c) \times (b - c) = b^2 - c^2$ ist. Allein
$(b + c) \times (b - c)$ = Recht. ADHK
c^2 = Quadr. LHGE und
b^2 = Quadr. CBFE, folglich ist
ADHK + LHGE = CBFE.

b) Nähme man $AB = 12$ und $AD = 8$, so wäre $AC = CB = 6$, $DB = 4$ und $CD = 8 - 6 = 2$. Man hätte daher $8 \times 4 + 2 \times 2 = 6 \times 6$, wie dieses wirklich der Fall ist.

c) Setzte man $AC = a$, $CD = b$ und $DB = c$, so wäre $AD = a + b$ und der Lehrsatz dieser $(a + b) \times c + b^2 = (b + c)^2$, dessen Wahrheit leicht erkannt wird. Denn es folgt sogleich

$ac + bc + b^2 = b^2 + 2\,bc + c^2$ daher
$ac + bc = 2\,bc + c^2$ und
$ac = bc + c^2 = (b + c) \times c$ oder
$a = b + c$, was nun wirklich der Fall ist, weil $AC = CB = CD + DB$ ist.

LXXXII. Zum 6. Satze. Es sei $AC = CB = a$, $ED = b$, so ist $AB = 2\,a$, $CD = a + b$ und $AD = 2\,a + b$ und der Satz sagt:

$(2\,a + b) \times b + a^2 = (a + b)^2$. Daß dieses nun wirklich so sei, lehrt die leichte Rechnung, da

$(2\,a + b) \times b + a^2 = 2\,ab + b^2 + a^2$ und
$(a + b)^2 = a^2 + 2\,ab + b^2$ ist.

LXXXIII. Zum 7. Satze. Setzt man hier BA = a, BC = b und CA = a — b, so ist die Behauptung diese: $a^2 + b^2 = 2\,ab + (a - b)^2$, deren Wahrheit sogleich einleuchtet, da $(a - b)^2 = a^2 - 2\,ab + b^2$ und folglich $2\,ab + (a - b)^2 = a^2 + b^2$ ist.

Wäre BA = 10, BC = 3 folglich CA = 7, so hätte man

$10^2 + 3^2 = 2 \times 10 \times 3 + (10 - 3)^2$ oder

$100 + 9 = 60 + 49 = 109.$

LXXXIV. Zum 8. Satze. Setzt man hier AC = b, CB = c, so ist AB = b + c und die Behauptung folgende:

$4\,(b + c) \times c + b^2 = [(b + c) + c]^2$ und die Entwickelung der Ausdrücke lehrt sogleich ihre Richtigkeit. Denn es ist

$4\,(b + c) \times c + b^2 = 4\,bc + 4\,c^2 + b^2$

$[(b + c) + c]^2 = b^2 + 2\,bc + c^2 + 2\,bc + 2\,c^2$

$+ c^2 = 4\,bc + 4\,c^2 + b^2$ wie zuvor.

LXXXV. Zum 9. Satze. a) Es sei AC = a = CB, CE = b, so ist AD = a + b und DB = a — b. Der Ausdruck des Satzes wird nun folgender:

$(a + b)^2 + (a - b)^2 = 2\,a^2 + 2\,b^2.$

Da nun $(a + b)^2 = a^2 + 2\,ab + b^2$ und

$(a - b)^2 = a^2 - 2\,ab + b^2$ ist, so muß

$(a + b)^2 + (a - b)^2 = 2\,a^2 + 2\,b^2$ seyn.

b) Setzte man AB = a, folglich AC = CB = $\frac{1}{2}$ a, und CD = b, so wäre AD = $\frac{1}{2}$ a + b und DB = $\frac{1}{2}$ a — b, und die Behauptung diese:

$(\frac{1}{2}\,a + b)^2 + (\frac{1}{2}\,a - b)^2 = 2 \times \left(\frac{a}{2}\right)^2 + 2\,b^2$. Da nun

$(\frac{1}{2}\,a + b)^2 = \frac{1}{4}\,a^2 + ab + b^2$, ferner

$(\frac{1}{2}\,a - b)^2 = \frac{1}{4}\,a^2 - ab + b^2$ ist, so ist

$(\frac{1}{2}\,a + b)^2 + (\frac{1}{2}\,a - b)^2 = \frac{2}{4}\,a^2 + 2\,b^2 = \frac{1}{2}\,a^2 + 2\,b^2.$

Allein $2 \times \left(\frac{a}{2}\right)^2 = 2 \times \frac{a^2}{4} = \frac{1}{2}\,a^2$ folglich ist die Richtigkeit des Satzes erwiesen.

LXXXVI. Zum 10. Satze. Es sei AC = CB = a und BD = b, so AD = 2 a + b, und CD = a + b. Der Lehrsatz ist nun folgender:

$(2a + b)^2 + b^2 = 2a^2 + 2(a + b)^2$. Es wird aber

$(2a + b)^2 = 4a^2 + 4ab + b^2$, folglich

$(2a + b)^2 + b^2 = 4a^2 + 4ab + 2b^2$. Da nun

$2(a + b)^2 = 2a^2 + 4ab + 2b^2$ ist, so ist auch

$2a^2 + 2(a + b)^2 = 4a^2 + 4ab + 2b^2$ wie zuvor.

LXXXVII. Zum 11. Satze. a) Die Möglichkeit der Auflösung dieser Aufgabe geht daraus hervor, daß, wenn das Rechteck aus BH und BA größer als das Quadrat von HA wäre, alsdann durch die Verkleinerung von BH jenes Rechteck kleiner und dieses Quadrat größer würde. Wäre aber das Rechteck aus BH und BA kleiner als das Quadrat von HA, so würde durch Vergrößerung der BH das Rechteck größer und das Quadrat kleiner werden. Da nun diese gegenseitige Vergrößerungen und Verkleinerungen nach dem Gesetze der Stetigkeit geschehen können, so muß einmal das Rechteck dem Quadrate gleich werden.

b) Eine algebraische Auflösung ist folgende. Es sei BA = a, HA = x, so ist BH = a − x und es soll seyn

$(a - x)\,a = x^2$; folglich ist

$a^2 - ax = x^2$ und

$x^2 + ax = a^2$, daher

$$x^2 + ax + \frac{a^2}{4} = a^2 + \frac{a^2}{4} = \frac{5a^2}{4}, \text{ somit}$$

$$x + \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{5a^2}{4}} \text{ und endlich}$$

$$x = -\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{5a^2}{4}}, \text{ welcher Werth nun leicht con-}$$

struirt werden kann.

Es sei (Fig. 304.) FG = a, so verlängere man diese Linie über G bis GM = ½ a ist, errichte in G auf MF das Loth GD = GF = a und ziehe DM, so ist $DM^2 = a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{5a^2}{4}$ und $DM = \sqrt{\frac{5a^2}{4}}$. Wird nun aus M mit

MG ein Kreisbogen beschrieben, welcher MD in N schneidet, so ist $MN = \frac{1}{2} a$ und $ND = -\frac{1}{2} a + \sqrt{\frac{5a^2}{4}}$.

LXXXVIII. Zum 12. Satze. Dieser Satz kann auch folgendergestalt sehr einfach bewiesen werden. Es ist

$CD^2 = CA^2 + AD^2 + 2\,CA \times AD$ (II, 7.) Allein

$DB^2 = DB^2$ folglich

$CD^2 + DB^2 = CA^2 + AD^2 + DB^2 + 2CA \times AD$, nun ist

$CD^2 + DB^2 = CB^2$ also

$CB^2 = CA^2 + AD^2 + DB^2 + 2CA \times AD$, aber

$AB^2 = AD^2 + DB^2$

$CB^2 = CA^2 + AB^2 + 2CA \times AD$.

LXXXIX. Zum 13. Satze. Ein anderer Beweis dieses Satzes, ähnlich dem vorigen, ist dieser. Es ist

$AB^2 = AD^2 + BD^2$ und

$BC^2 = BD^2 + 2BD \times DC + DC^2$ (II, 7.) folglich

$AB^2 + BC^2 = BD^2 + 2BD \times DC + DC^2 + AD^2 + BD^2$ oder

$AB^2 + BC^2 = BD^2 + 2BD \times DC + AC^2 + BD^2$ oder

$AB^2 + BC^2 = AC^2 + 2BD^2 + 2BD \times DC$, oder

$AB^2 + BC^2 = AC^2 + 2BD\,(BD + DC)$ d. h.

$AB^2 + BC^2 = AC^2 + 2BD \times BC$.

LXXXX. Zum 14. Satze. a) Diese Aufgabe kann auch durch Hülfe des nachfolgenden Lehrsatzes, welcher hier schon eine Stelle finden könnte, aufgelöset werden.

Lehrsatz.

Ein Winkel im Kreise, dessen Scheitel in der Peripherie liegt und dessen Schenckel durch die Endpuncte seines Durchmessers gehen, ist ein rechter.

Wenn (Fig. 305.) der Winkel ABD mit seinem Scheitel B in der Peripherie liegt und mit seinen Schenkeln BA und BD auf den Endpuncten A und D des Durchmessers AD steht, so ist er ein rechter.

Wenn man durch B den Durchmesser BCE zieht, so ist, wegen $BC = AC$, nun auch $\measuredangle ACE = 2 \measuredangle ABC$ und auf gleiche Art, wegen $BC = CD$, auch $\measuredangle ECD = 2 \measuredangle CBD$.

Daher ist nun

$$\measuredangle ACE + \measuredangle ECD = 2 \measuredangle ABD;$$

allein $\measuredangle ACE + \measuredangle ECD = 2$ R, daher

ist $\measuredangle ABD =$ R.

b) Um nun das Rechteck ABCD (Fig. 306.) in ein ihm gleiches Quadrat zu verwandeln, verlängere man AB über B bis AE = AD ist, beschreibe über AE einen Halbkreis, verlängere CB nach F und ziehe FA und FE, so ist $\measuredangle$ AFE = R und folglich Quadrat FANM = Rechteck ABCD. (I, 47.).

Anmerkungen
zum
dritten Buche des Euclides.

LXXXXI. Zur 1. Erklärung. a) Was dieser Erklärung entgegen zu stehen scheint, kann leicht dadurch vermittelt werden, daß man sagt: Gleiche Kreise sind jene, welche so in einander gelegt werden können, daß sie sich decken und folglich nur einen Kreis bilden; und nun ferner beweiset, daß zwei Kreise, welche gleiche Durchmesser oder Halbmesser haben, so in einander gelegt werden können, daß sie sich decken. Dieses Letztere geht nun aus der Entstehung des Kreises dadurch einleuchtend hervor, daß man zeigen kann, es könne mit einem gegebenen Halbmesser nur ein Kreis beschrieben werden. Sollte aus C (Fig. 307.) mit CA noch ein anderer Kreis als ADBE können beschrieben werden, so müßte dieser zum wenigsten einen Punct ausserhalb z. B. in F, oder einen Punct innerhalb z. B. in N haben. Man ziehe CF und CN. In jenem Falle ist CF $>$ CA und in diesem CN $<$ CA (XIII, a.) welches unmöglich ist, da der Radius CA sich immer gleich bleibt.

b) Auf ähnliche Art könnte man den grössern oder kleinern Kreis als jenen erklären, dessen Halbmesser größer oder kleiner als der eines andern Kreises ist, nachdem bewiesen worden ist, daß der mit größerm Halbmesser beschriebene Kreis nur zum Theil von dem mit kleinerm Radius beschriebenen gedeckt wird; so wie umgekehrt dieser letztere nur einen Theil des erstern decken kann, was keine weitere Schwierigkeit hat. Diese Erklärungen sind daher hier als Sacherklärungen zu betrachten.

LXXXXII. Zur 2. Erklärung. a) Mit mehr Klarheit sagt man, die Tangente sei jene gerade Linie am Kreise, welche mit demselben nur einen Punct gemein hat; obwohl

es entschieden ist, daß jede gerade Linie, welche den Kreis schneidet keine Tangente seyn kann.

b) Diese Erklärung der Tangente muß übrigens erst durch die Sätze der Wissenschaft zur Realität gebracht werden d. h. man muß durch überzeugende Gründe darthun, wie eine solche gerade Linie entstehen kann.

LXXXXIII. Zur 3. Erklärung. a) Auch hier kann man sagen: Kreise berühren sich, wenn sie nur einen Punct mit einander gemein haben. Diese Berührung kann sowohl von Aussen als von Innen Statt finden.

b) Ist klar, daß auch diese Erklärungen nur Worterklärungen sind und erst durch die wissenschaftlichen Sätze müssen gerechtfertigt werden.

LXXXXIV. Zur 4. Erklärung. Da es von einem Puncte ausserhalb einer gegebenen geraden Linie nur ein Loth auf dieselbe gibt, so bestimmt dieses Loth den Abstand des Punctes von dieser Linie, und der Sinn dieser Erklärung ist deutlich. Um solche gleichweit vom Mittelpunct abstehende Linien wirklich zu construiren, ziehe man zwei willkührliche Halbmesser, nehme von jedem ein gleiches Stück und ziehe durch den Endpunct auf sie zwei Lothe, welche den Kreis beiderseits einmal durchschneiden müssen, so sind diese Linien die verlangten.

LXXXXV. Zur 5. Erklärung. Auf ähnliche Art wie zuvor können auch zwei vom Mittelpuncte ungleich weit abstehende gerade Linien im Kreise construirt werden, und dann kann man sagen, jene derselben sei näher bei dem Mittelpuncte, auf welche das kleinere Loth fällt.

LXXXXVI. Zur 6. Erklärung. a) Wenn man in der Peripherie des Kreises zwei willkührliche Puncte annimmt und zwischen ihnen eine gerade Verbindungslinie zieht, so heißt dieselbe eine Sehne des Kreises. Daß aber keine zwei Puncte dieser Peripherie, auch wenn sie noch so nahe beisammen liegen, eine gerade Linie bilden können und somit die Sehne nie in den Bogen fallen kann, ist leicht nachzuweisen. In dem Kreise (Fig. 308.) aus C mit CA seien A und B zwei noch so nahe beisammen liegende Puncte, so kann die gerade Linie AB nie in

den Bogen AEB fallen, weil ∢ CAB = ∢ CBA < R und folglich jede von C nach AB gezogene Linie kleiner als CA seyn und folglich mit ihrem Endpuncte innerhalb des Kreises liegen muß.

b) Diese Erklärung des Kreisabschnittes als jenes Theils der Kreisfläche, welcher zwischen einer Sehne und dem durch ihre Endpuncte bestimmten Bogen enthalten ist, ist also hier schon als Sacherklärung zu betrachten. Auch sieht man leicht, daß jede Sehne im Kreise zwei Abschnitte, einen größern und einen kleinern habe. Ist die Sehne der Durchmesser, so sind beide Abschnitte einander gleich und jeder ist ein Halbkreis. Ferner wird hieraus deutlich, was man Sehne des Abschnitts und Bogen des Abschnitts nennt.

LXXXXVII. Zur 7. Erklärung. Diese Erklärung des Winkels, welchen eine Sehne im Kreise mit ihrem Bogen bildet, also etwa (Fig. 308.) des Winkels FGH, läßt sich wohl durch die Anschauung erläutern, kann aber erst durch die späteren Lehren der Wissenschaft näher verstanden werden. Einige haben sie, als eingeschoben, aus den Elementen des Euclides weggelassen.

LXXXXVIII. Zur 8. Erklärung. a) Wenn man in dem Kreisbogen (Fig. 308.) GHF den willkührlichen Punct J nimmt und JF nebst JG zieht, so ist der Winkel FJG der Winkel im Abschnitte FGJF. Man sieht aber, daß der Punct J auch anderswo genommen werden könnte, wodurch die Linien FJ und JG eine andere Lage erhalten. Ob der nun entstehende Winkel auch ein anderer, d. h. ein größerer oder ein kleinerer als der vorige sei, kann aus dieser Erklärung, welche übrigens eine Sacherklärung ist, nicht erkannt werden. Die folgenden Sätze werden lehren, daß alle diese Winkel einander gleich sind.

Auch ist klar, daß in dem größern Abschnitte FABGF solche Winkel entstehen, wenn man von F und G nach A oder nach B gerade Linien zieht.

b) Die Grundlinie des Abschnitts ist immer die Sehne des Kreises, welche denselben mit dem ihr zugehörigen

Bogen bildet. Die Höhe des Abschnitts könnte man jenes Loth nennen, welches aus der Mitte der Sehne auf sie senkrecht errichtet und bis zur Peripherie verlängert wird. Ungleiche Abschnitte haben verschiedene Höhen. Jedes andere auf die Sehne gezogene, bis zum Umfange verlängerte Loth ist kleiner als jenes frühere. Diese beiden Sätze müssen aber erst bewiesen werden.

LXXXIX. Zur 9. Erklärung. So steht also (Fig. 308.) der Winkel FJG auf dem Bogen FABG. Dächte man sich die geraden Linien FA und AG gezogen, so stände der Winkel FAG auf dem Bogen FJG und beide Winkel würden zusammen die ganze Peripherie des Kreises zwischen ihren Schenkeln fassen.

Ueberhaupt sagt man von jedem Winkel, dessen Scheitel in der Peripherie liegt, er stehe auf jenem Bogen, welcher zwischen seinen Schenkeln liegt. So steht der Winkel FGJ auf dem Bogen FJ und der Winkel GFJ auf dem Bogen GHJ.

Eben dieses gilt auch von dem Mittelpunctswinkel ACB, welcher auf dem Bogen AEB steht.

C. Zur 10. Erklärung. Es ist also (Fig. 309.) jenes Stück des aus C mit CA beschriebenen Kreises, welches zwischen den Halbmessern AC und CB und dem zwischen ihnen liegenden Bogen AGB eingeschlossen wird, ein Kreisausschnitt. Man nennt ∠ ACB den Winkel des Ausschnitts und Bogen AGB den Bogen des Ausschnitts. Rückt nun CB allmählig in die Lage CD, wodurch ∠ ACB zum ∠ ACD wird, so wächst der Ausschnitt hierdurch an Größe und wenn CD noch weiter bis zur Lage CE, in die Verlängerung von AC, fortrückt, so vereinigt sich in dem Halbkreise ABDE sowohl der Ausschnitt als der Abschnitt. Käme CE in die Lage von CF, so könnte man sich unter ABDEF einen auswärtsgehenden Ausschnitt und unter ACFH den gewöhnlichen Ausschnitt, als seine Ergänzung zum ganzen Kreise vorstellen.

CI. Zur 11. Erklärung. Wenn in dem Kreise (Fig. 310.) ACEF durch den Abschnitt ABC der Winkel ABC und durch den Abschnitt DFE der Winkel FED gebildet wird, so sind diese

zwei Abschnitte nicht bloß einander ähnlich, sondern congruent, wenn auch noch ∢ B = ∢ E ist. Wäre aber ∢ ABC = ∢ MNP in dem größern Kreise MPQH, so würden beide Abschnitte ABC und MNP einander ähnlich seyn d. h. an Gestalt übereinstimmen bei verschiedener Größe. Eben so auch Abschnitt FED und HSQ, wenn ∢ FED = ∢ HSQ ist. Diese Aehnlichkeit muß indessen, so wie jene Congruenz, ebenfalls erst wissenschaftlich begründet werden.

CII. Zum 1. Satze. Der Beweis dieses Satzes ist indirect. Will man einen directen Beweis, so lasse man folgenden Hülfssatz vorausgehen.

Wenn man vom Mittelpuncte des Kreises ein Loth auf eine Sehne in ihm zieht, so wird dieselbe halbirt.

Es sei (Fig. 311.) CD ein Loth auf AB, so ist AD = DB.

Man ziehe AC und CB, so ist, wegen CA = CB, auch ∢ A = ∢ B; daher, wegen ∢ CDA = ∢ CDB = R, auch ∢ ACD = ∢ BCD und folglich △ CDA ≅ △ CDB, woraus AD = DB folgt.

Oder: Da $CA^2 - CD^2 = AD^2$ und $CB^2 - CD^2 = DB^2$, so muß auch $AD^2 = DB^2$ und folglich AD = DB seyn.

Zusatz. 1. Da von C nur ein Loth auf AB möglich ist und dieses in der Mitte von AB eintrifft, so muß auch das aus der Mitte der Sehne errichtete Loth DC durch den Mittelpunct des Kreises gehen.

Zusatz. 2. Wird daher dieses Loth CD über C und D nach E und F verlängert, so muß EF der Durchmesser und folglich in dessen Mitte c des Kreises Mittelpunct seyn.

Zusatz. 3. Auch folgt hieraus, daß ein Kreis nur einen Mittelpunct habe, denn er kann nur in dem einen Lothe DC und muß folglich in der Mitte von FE liegen.

CIII. Zum 2. Satze. a) Auch dieser Satz kann leicht direct bewiesen werden. Wenn AB (Fig. 312.) die gerade Linie ist, welche die Puncte A und B des Kreises verbindet, so ziehe man die Halbmesser CA und CB, wodurch das gleichschenkelige Dreieck ACB entsteht, in welchem ∢ CAB = ∢ CBA

< R ist. Zieht man nun das Loth CD, so muß dieses zwischen A und B nnd zwar (nach CII.) in der Mitte von AB in D eintreffen und es ist CD < CA. Daher liegt D innerhalb des Kreises. Da jede andere gerade Linie, wie CE, ebenfalls < CB ist, so muß auch jeder Punct zwischen A und B sich in dem Kreise befinden. Wird AB über B verlängert, so muß CF > CB seyn und folglich F ausserhalb des Kreises liegen.

b) Daher kann eine gerade Linie den Kreis nur in zwei Puncten durchschneiden. Denn hätte sie auser A und B noch einen Punct gemein, so müßte eine Linie wie CE oder CF der Linie CB gleich seyn können, welches unmöglich ist. Demnach kann durch drei in geräder Linie liegende Puncte kein Kreis beschrieben werden uud jeder Kreisbogen, sei er auch noch so klein, muß als eine krumme Linie betrachtet werden.

CIV. A) Zum 3. Satze. Daß das von E auf AB gezogene Loth diese AB in F halbirt, ist bereits oben (CII.) bewiesen worden. Wird dieses Loth EF bis zur Peripherie in D verlängert, so ist auch Bogen AD = Bogen DB. Denn da Winkel AED = Winkel DEB ist, so kann jener so in diesen gelegt werden, daß sich beide decken und EA in EB fällt. Sollte nun Bogen AD nicht in den Bogen DB fallen, so müßte ein Punct von AD ausserhalb DB oder innerhalb BD fallen, welches Beides nicht möglich ist, da sonst die Halbmesser ungleich wären. Zöge man noch die Sehnen AD und DB, so könnte man hier schon einsehen, daß AD = DB wäre, weil △ AED ≅ △ BED ist.

CIV. B) Zum 4. Satze. a) Die Thesis des Satzes heißt eigentlich: so kann nicht jede von der andern halbirt werden. Denn es ist klar, daß eine von der andern halbirt werden kann.

b) Wenn sich zwei gleiche gerade Linien (Fig. 313.) AN und BM dergestalt im Kreise schneiden, daß ihre Segmente AD und BD, so wie auch MD und ND einander gleich sind, so wird eine Linie HDJ, welche die Scheitelwinkel ADB und MDN halbirt, und beiderseits zur Peripherie reicht, ein Durchmesser dieses Kreises seyn. Denn wenn man MN zieht, so ist △

MDQ ≋ △ NDQ folglich MQ = NQ und es muß sich in dem Lothe QD der Mittelpunct des Kreises befinden.

CV. Zum 5. Satz. a) Hier werden zwei Kreise **vorausgesetzt**, welche einander durchschneiden. Sollen sie **wirklich construirt** werden, so müssen sie **verschiedene Mittelpuncte** haben. Denn hätten sie nicht verschiedene Mittelpuncte, so müßten sie denselbigen Mittelpunct haben. Haben sie aber einerlei Mittelpunct und auch einerlei Halbmesser, so sind es congruente Kreise, welche **nur einen einzigen** bilden. Sind die Halbmesser verschieden, so kann der größere Kreis mit dem kleinern keinen Punct gemein haben und beide können sich daher nicht schneiden. Allein nicht alle Kreise, welche verschiedene Mittelpuncte haben, schneiden einander. Daher bemerke man über das Schneiden und Berühren der Kreise folgende Sätze.

b) Wenn die Entfernung der Mittelpuncte zweier Kreise größer ist, als die Summe ihrer Halbmesser, so liegen beide ganz auſſer einander und haben keinen Punct mit einander gemein.

Es sei (Fig. 314.) AB > AD + EB, so liegen die Kreise M und N ganz auſſer einander.

Denn hätten sie auch nur einen Punct z. B. C gemein, so wäre AC Halbmesser von M und BC Radius von N und es müßte AC + CB < AB seyn, was widersprechend ist, da AC + CB > AB seyn muß.

c) Wenn die Entfernung AB (Fig. 315.) zweier Kreise M und N so groß ist, als die Summe ihrer Halbmesser AC und CB, so haben diese Kreise nur den Punct C gemein d. h. sie berühren sich von Aussen.

Denn wenn sie noch einen Punct, etwa D gemein hätten, so wären AD und BD die Halbmesser dieser Kreise und es müßte AD + DB = AB seyn, was nicht seyn kann, da AD + DB > AB ist.

d) Wenn die Entfernung der Mittelpuncte CD (Fig. 316.) kleiner ist, als die Summe der Halbmesser, d. h. wenn CD < CB + AD, so müssen sich die zwei Kreise in zwei Puncten durchschneiden.

Beschreibt man mit CB den Halbkreis BHE, so muß sich der Punct A innerhalb seiner Fläche befinden. Wird daher mit DA ebenfalls ein Halbkreis ASF beschrieben, so muß derselbe, da der Punct F offenbar ausserhalb des Halbkreises BHE liegt, diesen letztern nothwendig durchschneiden. Daher hat in N ein Durchschnittspunct Statt. Auf ähnliche Art muß ein zweiter Durchschnitt in M erfolgen.

e) Wenn die Entfernung der Mittelpuncte zweier Kreise CD (Fig. 317.) nebst dem Halbmesser DB des kleinern so groß ist als der Halbmesser des größern, so befindet sich der kleinere Kreis ganz innerhalb des größern und hat mit ihm nur einen Berührungspunct gemein.

Denn hätten diese Kreise ausser B noch einen andern Punct, etwa E gemein, so ziehe man CE und DE, welche ebenfalls Halbmesser seyn müßten. Da nun CD + DB = CB ist, und DB = DE, auch CB = CE wäre, so müßte auch CD + DE = CE seyn, was widersprechend ist, weil CD + DE > CE seyn muß.

f) Wenn die Entfernung der Mittelpuncte zweier Kreise, oder CD (Fig. 318.) nebst dem Halbmesser DB des einen kleiner ist, als der Radius CA des andern, d. h. wenn CD + DB < CA ist, so liegt der kleinere Kreis ganz innerhalb des größern und hat keinen Punct mit ihm gemein.

Denn wenn beide einen Punct, etwa E gemein hätten, so wäre DE Halbmesser des kleinern und CE Radius des größern Kreises und es müßte, nach der Annahme, CD + DE < CE seyn, was nicht möglich ist, da CD + DE > CE seyn muß.

Ausser dieser fünffach verschiedenen Lage kann bei zwei Kreisen aus verschiedenen Mittelpuncten keine andere mehr Statt finden.

CVI. Zum 6. Satze. a) Die Hypothesis dieses Satzes (zwei Berührungskreise von innen) ist nun durch das Vorhergehende erwiesen.

b) Hätten sie einen gemeinschaftlichen Mittelpunct, so müßten sie, bei gleichen Halbmessern, durchaus ineinander

fallen und, bei verschiedenen Radien, müßte der kleinere ganz in dem größern liegen.

CVII. Zum 7. Satze. a) Soll also durch einen in der Kreisebene gegebenen Punct B (Fig. 319.) eine gerade Linie zur Peripherie gezogen werden, welche die kleinste von allen möglichen ist, so ziehe man durch B und den Mittelpunct C die gerade Linie BC, welche, nach D und A verlängert, zum Durchmesser AD wird. Hier ist nun BA diese kleinste Linie. Die größte aber, welche aus B zur Peripherie gezogen werden kann, ist BD.

b) Da es bei stetigen Größen zwischen dem Größten und Kleinsten noch ein Mittleres geben muß, so entsteht die Frage: Wo liegt diese mittlere Linie, welche, wie man leicht einsieht, dem Halbmesser gleich seyn muß? — Wenn man BC in F halbirt aus F das Loth FE auf AC errichtet und EB zieht, so ist BE diese mittlere Linie. Denn es ist, wie man leicht findet, $\triangle$ EFC $\cong$ $\triangle$ EFB, folglich BE $=$ CE Da nun CE ein Halbmesser des Kreises ist, so muß auch BE ein solcher seyn.

CVIII. Zum 8. Satze. a) Daß Euclides in diesem Satze von Linien spricht, welche aus dem Puncte D nach dem hohlen und nach dem erhabenen Theile der Peripherie gezogen werden, ist deßhalb nicht zu billigen, weil die Grenze nicht nachgewiesen ist, welche in Bezug auf diesen Punct D, das Hohle vom Erhabenen scheidet. Diese Grenze liegt da, wo zwei von D an den Kreis gezogene Tangenten denselben berühren. Jener Theil der Peripherie welcher zwischen diesen Berührungspuncten nach D hin liegt, ist der erhabene und der andere, immer größere Theil derselben ist der hohle in Bezug auf D. Allein Euclides lehrt erst später (17. Satz) wie von D diese zwei Tangenten zu construiren sind, obgleich sowohl die Construction der Tangente für einen Punct in der Peripherie, als auch für einen Punct ausserhalb des Kreises schon vor dem 8. Satze hätte nachgewiesen werden können.

b) Mit Umgehung dieser Begriffe vom erhabenen und hohlen Theile der Peripherie könnte man beweisen:

1) daß unter allen Linien, welche aus D nach einem willkührlichen Puncte der Peripherie gehen, jene welche durch den Mittelpunct tritt, also DMA, die größte sei. Es ist also nach Euclides zu zeigen, daß DA > DE; DA > DF; DA > DH; DA > DG u. s. f. sei.

2) Daß unter allen aus D nach irgend einem Puncte der Peripherie gezogenen Linien jene (nämlich DG) die kleinste sei, welche das ausser dem Kreise liegende Segment der Verbindungslinie DM bildet; wo denn bewiesen wird, daß DG < DH, DG < DC, DG < DE u. s. w. ist.

CIX. Zum 9. Satze. Die Richtigkeit des Satzes geht sogleich daraus hervor, daß aus jedem Puncte D (Fig. 313.) welcher nicht der Mittelpunct des Kreises ist, (nach 7. Satz) nur zwei gleiche gerade Linien DA = DB oder DM = DN zur Peripherie gezogen werden können. Wenn also aus einem Puncte im Kreise drei gerade und gleiche Linien zum Umfange gehen, so muß dieser Punct der Mittelpunct seyn.

CX. Zum 10. Satze. a) Dieser Satz kann auch dadurch bewiesen werden, daß zwei Kreise, welche drei Puncte mit einander gemein haben, so incinanderfallen müssen, daß sie sich decken.

Durch drei nicht in gerader Linie liegende Puncte (Fig. 320.) A, B und D einen Kreis zu construiren, verbinde man diese Puncte durch die geraden Linien AB und BD, halbire AB in E, BD in F und errichte die Lothe EC und FC nach der Oeffnung des Winkels ABD hin, so müssen sich diese, weil nach gezogener Hülfslinie EF der ∠ FEC < R und auch ∠EFC < R ist, einmal in C durchschneiden. Zieht man nun CA, CB und CD, so ist leicht einzusehen, daß △ AEC ≅ △ BEC und △ BFC ≅ △ DFC und folglich CA = CB = CD ist. Daher muß der mit CA aus C beschriebene Kreis durch die Puncte A, B und D gehen.

b) Auch sieht man hieraus, daß durch diese festbestimmte Puncte A, B und D nur ein Kreis construirt werden kann,

weil die Lothe EC und FC nur einen Durchschnittspunct C geben.

c) Wenn sich nun zwei verschiedene Kreise in drei Puncten durchschneiden könnten, so müßten sie diese drei Puncte gemeinschaftlich haben. Da aber durch diese drei Puncte, welche nie in einer geraden Linie liegen können, nur ein Kreis möglich ist, so wären es nicht zwei verschiedene Kreise, sondern es müßte nur ein einziger seyn.

d) Kreise, welche drei Puncte mit einander gemein haben, sind nicht mehr zwei verschiedene Kreise, sondern decken einander.

CXI. Zum 11. Satze. In der Hypothesis dieses Satzes werden wieder zwei Kreise vorausgesetzt, wovon einer den andern von Innen berührt. Die Construction solcher Kreise hat Euclides nicht nachgewiesen, ist aber oben (XV, e) gezeigt worden.

CXII. Zum 12. Satze. Da hier dieselbige Hypothesis in Bezug auf zwei Kreise Statt findet, welche sich Aussen berühren, so gilt hier die nämliche Bemerkung wie zuvor. Man sehe oben (CV, c.)

CXIII. Zum 13. Satze. Auch die Wahrheit dieser zwei Behauptungen geht aus dem hervor, was bereits früher von diesen Berührungskreisen (CV, c u. e) bemerkt worden ist.

CXIV. Zum 14. Satze. Dieser Satz folgt auch daraus, daß, wenn $AB = CD$ ist, auch $AF = CG$ seyn muß, und nun die rechtwinkeligen Dreiecke EFA und EGC, weil in ihnen $AF = CG$, ferner $EA = CE$ und $\measuredangle EFA = \measuredangle EGC = R$ ist, einander congruent sind, da von A nur eine schiefe Linie $= AE$ auf den Schenkel FE möglich ist, welche eine bestimmte Größe hat (XLIII, d, e.)

Ist aber $EF = EG$ und $EA = EC$, so muß aus gleichem Grunde auch $FA = GC$ und folglich $AB = CD$ seyn.

CXV. Zum 15. Satze. a) Daß die größte Linie, welche von einem willkührlichen Puncte A (Fig. 321.) des Kreises ADB in demselben gezogen werden kann, der Durchmesser ACB ist, folgt leicht daraus, daß jede andere Linie wie AD kleiner als AB seyn muß. Wenn man CD zieht, so ist AC + CD

$>$ AD; allein AC + CD = AC + CB = AB; daher AB $>$ AD.

b) Wenn EC (Fig. 322.) näher bei C ist als DF, so ist EG $>$ DF. Da hier das Loth CB $<$ CA ist und CE = CD, so muß, weil $EB^2 = CE^2 - CB^2$ und $DA^2 = CD^2 - CA^2$, hier $EB^2 > DA^2$ und folglich auch EB $>$ DA seyn.

Auf ähnliche Art wird bewiesen, daß, wenn EG $>$ DF ist, auch CB $<$ CA seyn muß.

CXVI. Zum 16. Satze. a) Durch diesen Satz wird der Begriff der Tangente zur eigentlichen Sacherklärung. Daß die Linie AB (Fig. 323.), welche in D auf CD lothrecht steht, nur diesen Punct mit dem Kreise gemein hat, folgt auch sogleich daraus, daß jede andere aus C gezogene, wie CE oder CF, weil $\measuredangle$ CDE = $\measuredangle$ CDF = R ist, größer als CD seyn und folglich ihren Endpunct ausserhalb des Kreises haben muß.

b) Da jeder Punct der Peripherie, wie M oder N, einen andern Radius CM oder CN hat, so hat auch jeder Punct der Peripherie eine andere Tangente.

CXVII. Zum 17. Satze. a) Es ist klar, daß durch dieselbige Construction noch eine zweite Tangente AH (Fig. 324) erhalten wird.

b) In Bezug auf den Punct H u. B wird der Bogen HDB erhaben und der Bogen HNMB hohl genennt.

c) Wenn der Punct A in der verlängerten DA fortrückt, so müssen die Tangentenpuncte H und B immer mehr gegen N und M rücken, ohne daß H je einmal in N und B in M fiele. Denn nun müßten die beiden Tangenten, weil bei N und M rechte Winkel wären, mit einander parallel seyn, was der Annahme widerspricht, daß sie aus einem Puncte in der verlängerten Linie DA kommen.

d) Rückt dagegen A näher nach D, so rücken auch H und B mehr nach D, und wenn A in D selbst fällt, so fallen auch H und B in D und aus zwei Tangenten wird nun eine einzige.

e) Hier bemerke man folgende Aufgabe. Es sind (Fig. 325.) zwei Halbkreise FAK und JDL von ungleichen Radien

CK > BL auf der nämlichen geraden Linie FE gegeben. Man soll eine Linie ziehen, welche für jeden eine Tangente ist.

Man halbire CB in G, beschreibe einen Halbkreis CMB und trage aus C in denselben die CH = CK — BL. Zieht man nun HB, so ist ∢CHB = R. Wird nun CH nach A verlängert, durch B die BD mit CA parallel gezogen und durch A und D die gerade AD gelegt, so ist AD die Tangente für beide Kreise.

Denn weil ∢CHB = R, so ist auch ∢AHB = R und weil BD mit HA gleichlaufend ist, so muß auch ∢HBD = R seyn. Da ferner HA = BD, so ist AHBD ein Rechteck und ∢HAD = ∢BDA = R, folglich AD für jeden Kreis Tangente.

CXVIII. Zum 18. Satze. Dieser Satz läßt sich auch so beweisen. Wenn DE in C auf FC lothrecht steht, so ist DE eine Tangente. Nun gibt es aber von F auf DE **nur ein Loth**; folglich muß dieses Loth der Radius FC seyn.

CXIX. Zum 19. Satze. Auch so. Wenn DE in C eine Tangente ist, so muß der Radius GC auf ihr lothrecht stehen (18. S.) Nun gibt es aber aus C **nur ein Loth** auf DE; folglich muß dieses durch den Mittelpunct gehen.

CXX. Zum 20. Satze. a) **Der einfachste Fall** in der Lage ist der, bei dem (Fig. 326.) der eine Schenkel BA des Peripheriewinkels BAD durch den Mittelpunct des Kreises geht. Hier ist BCD der ihm entsprechende Mittelpunctswinkel und man hat, wegen CA = CD, sogleich ∢A = ∢D und ∢BCD = 2 ∢A.

b) Wäre (Fig. 327.) ABD der Peripheriewinkel und ∢ABD > R, so würde der Winkel am Mittelpuncte der auswärts gehende Winkel ACD seyn, welchem der Bogen AHD entspricht. Hier ist wieder ∢ABD = ½ ∢ACD, was um so anschaulicher wird, wenn man BCH zieht, wodurch ∢ACD = ∢ACH + ∢HCD wird.

CXXI. Zum 21. Satze. a) Auf ähnliche Art sind auch die Winkel im anderen Abschnitte BCD, wenn sie ihre Scheitel in dem Bogen BCD und ihre Schenkel in B und D haben, unter sich gleich.

b) Wenn die Sehne BD (Fig. 328.) kleiner ist als des Kreises Durchmesser, so sind die Peripheriewinkel im größern Kreisbogen BAD spitze; jene im kleinern Bogen BED aber stumpfe Winkel. Denn wenn man die Halbmesser CB und CD zieht, so ist $\measuredangle BCD < 2R$, allein $\measuredangle BAD = \frac{1}{2}\measuredangle BCD$; folglich $\measuredangle BAD < R$.

Auf ähnliche Art ist der erhabene Winkel BCD, welchem der Bogen BAD entspricht, größer als 2R, weil $\measuredangle BCD$ (der gewöhnliche Winkel) $< 2R$. Da nun $\measuredangle BED = \frac{1}{2}\measuredangle BCD$ (dem erhabenen), so ist auch $\measuredangle BED > R$.

c) Daß alle Peripheriewinkel, welche mit ihren Schenkeln auf dem Durchmesser stehen, rechte Winkel sind, ist bereits oben (LXXXX, a) bewiesen worden.

CXXII. Zum 22. Satze. Der umgekehrte Satz, nebst seinem Beweise, ist folgender. Wenn in einem Vierecke die zwei Paare von Gegenwinkeln zwei Rechte betragen, so kann ein Kreis durch seine vier Winkelpuncte beschrieben werden.

Wenn (Fig. 329.) ABCD das Viereck ist, worin $\measuredangle ABC + \measuredangle ADC = 2R$ und $\measuredangle BAD + \measuredangle BCD = 2R$, so beschreibe man aus G einen Kreis, welcher durch die Puncte B, A und D geht (CX, a). Sollte dieser Kreis nun nicht durch C gehen, so müßte er drüber, etwa nach BFD, oder drunter, wie nach BED fallen.

Wäre jenes, so müßte, wenn BC nach F verlängert und DF gezogen wird, $\measuredangle BFD + \measuredangle A = 2R$ seyn (22. S.). Da aber auch $\measuredangle BCD + \measuredangle A = 2R$ ist, so wäre $\measuredangle BFD = \measuredangle BCD$, welches unmöglich ist.

Wäre dieses, so müßte, wenn man BE zieht, $\measuredangle BED = \measuredangle BCD$ seyn, welches ebenfalls nicht seyn kann.

CXXIII. Zum 23. Satze. a) Sollte über AB (Fig. 330.) ausser dem Abschnitte AFEB noch ein anderer möglich seyn, der ihm ähnlich ist, so müßte dieser entweder einen Punct ausserhalb desselben, wie C, oder innerhalb desselben, wie D, haben. Wäre jenes, so müßte, wenn AC, CB und EB gezogen wird, $\measuredangle ACB = \measuredangle AEB$; und wäre dieses, so müßte,

wenn BDF, AD und AF gezogen wird, ∢ADB = ∢AFB seyn, welches widersprechend ist.

b) Daß auf der andern Seite von AB ebenfalls kein solcher Abschnitt möglich ist, folgt daraus, daß man den gegebenen Abschnitt AFEB jenseits der Linie AB construiren und nun den nämlichen Beweis wiederholen kann.

CXXIV. Zum 24. Satze. a) Da die Congruenz aus der Uebereinstimmung in Gestalt und Größe hervorgeht, so sind diese hier genannten Kreisabschnitte einander congruent d. h. sie können so in einander fallen, daß sie nur einen einzigen bilden.

b) Aber wie werden zwei Kreisabschnitte construirt, welche einander bloß ähnlich sind? Nur hierdurch kann die oben gegebene Erklärung (III, 11 Erkl.) zur Sacherklärung werden. Die leichte Construction, welche Euclides übergangen hat, ist folgende.

Es sei (Fig. 331.) in dem Kreise um D ein Abschnitt ACB gegeben und man soll einen ihm ähnlichen in dem Kreise um N construiren.

Man ziehe AD und DB, sodann EN willkührlich und mache ∢N = ∢D. Wird nun EF gezogen, so ist Abschnitt EMF ähnlich dem Abschnitte ACB.

Nimmt man die willkührlichen Puncte G und H und zieht AG, GB und EH, HF, so ist, weil ∢D = ∢N, auch ∢G = ∢H. Allein es ist ∢G + ∢C = 2R und ∢H + ∢M = 2R, folglich auch ∢C = ∢M. Ist aber ein Winkel des einen Abschnitts einem des andern gleich, so sind auch alle einander gleich und diese Abschnitte einander ähnlich.

CXXV. Zum 25. Satze. Von diesem Satze theilen wir folgende höchst einfache Auflösung mit.

Wenn (Fig. 332.) ADB der gegebene Abschnitt ist, so halbire man AB in E, errichte das Loth DEH auf AB, ziehe DA, so ist ∢EDA < R, so wie auch ∢DAE < R. Nun errichte man in A auf DA das Loth AL, so muß dieses, weil ∢ADC + ∢DAL < 2R, die DH schneiden. Es sei G dieser

Durchschnittspunct, so halbire man DG in C und es ist C der Mittelpunct des zu findenden Kreises, dessen Abschnitt ADB ist.

Denn wenn man mit CG = CD einen Halbkreis über GD nach A hin beschreibt, so muß derselbe durch A gehen. Wäre dieses nicht, so müßte CA > CG oder CA < CG seyn. Im ersten Falle nehme man CM = CG und es müßte der von den zwei zu ziehenden Linien GM und MD bei M gebildete Winkel GMD = R seyn, was nicht seyn kann, da ∢ GAD = R ist. Im zweiten Falle sei CN = CG, so müßte der von den zu ziehenden Linien GN und ND gebildete Winkel GND = R seyn, was ebenfalls nicht Statt findet, weil ∢ GAD = R ist.

CXXVI. Zum 26. Satze. a) Auch bemerke man folgenden einfachen Beweis. Da, nach der Annahme, GB = HE und ∢ BGC = ∢ EHF, so kann BGC so in EHF gelegt werden, daß sie sich decken. Sollte nun der Bogen BKC den Bogen ELF nicht decken, so müßte irgend ein Punct von BKC entweder innerhalb des Raumes HELF, oder ausserhalb desselben fallen. In jenem Falle wäre die von H nach ihm gezogene Linie kleiner und in diesem größer als HE, was unmöglich ist, weil alle Puncte in BKC von G die unveränderte Entfernung = GB = HE haben.

Da die Peripheriewinkel A und D nur dann einander gleich sind, wenn ihnen gleiche Mittelpunctswinkel G und H entsprechen, so müssen auch die Bogen BKC und ELF einander gleich seyn, wenn ∢ A = ∢ D ist.

b) Auf ähnliche Art wird bewiesen, daß, wenn ∢ BGC > EHF wäre, nun auch Bogen BKC > Bogen ELF seyn muß; und umgekehrt, wenn ∢ BGC < ∢ EHF wäre, so müßte auch Bog. BKC < Bog. ELF seyn. — Ferner, wäre ∢ BGC = 2 ∢ EHF, so müßte auch Bog. BKC = 2 Bog. ELF seyn u. s. f.

CXXVII. Zum 27. Satze. Dieser Satz, der umgekehrte des vorigen, kann auch sehr leicht durch das Ineinanderlegen der als gleich angenommenen Bogen bewiesen werden, wobei sich die ganzen Ausschnitte und folglich auch die Winkel am Mittelpuncte decken müssen. — Auch gehören größere Bogen

zu größern Winkeln, kleinere Bogen zu kleinern Winkeln und 2, 3.... n mal größere Bogen entsprechen auch 2, 3....n mal größern Winkeln.

CXXVIII. Zum 28. Satze. Auch ist der zur größern Sehne gehörige Bogen auf der einen Seite größer und auf der andern Seite kleiner, als der zur kleinern Sehne gehörige auf einer Seite derselben. Denn wenn EF > BC ist, so muß auch, weil KB = KC = LE = LF ist, ∢L > ∢K und folglich Bogen EHF > Bogen BGC; aber auch Bogen EDF < Bogen BAC seyn.

CXXIX. Zum 29. Satze. Dieser Satz ist der umgekehrte des vorigen, und kann auch sehr einfach dadurch bewiesen werden, daß, wenn Bog. BGC = Bog. EHF ist, jener so in diesen gelegt werden kann, daß sie sich decken, wo denn zwischen den in einander liegenden Puncten B, E und C, F nur eine gerade Linie möglich ist.

Umgekehrt folgt nicht immer, daß, wenn Bog. EHF > Bog. BGC ist, auch EF > BC seyn müsse. Denn wenn Bog. EHF bis zum Bogen EHFDN wächst, so könnte EN < BC seyn.

CXXX. Zum 30. Satze. a) Wenn man von C auf AD und BD zwei Lothe zieht und bis zur Peripherie verlängert, so wird der Bogen ADB in vier gleiche Theile getheilt, weil die bei C entstehenden Mittelpunctswinkel einander gleich sind. Auf ähnliche Art kann diese Theilung des Bogens weiter fortgesetzt und derselbe in 8, 16, 32.... und überhaupt in 2^n gleiche Theile getheilt werden.

b) Wenn der gegebene Bogen ein Halbkreis ist, so gibt die erste Theilung den vierten, die zweite den achten, die dritte den sechszehnten Theil des ganzen Umfangs u. s. w.

CXXXI. Zum 31. Satze. Einige von diesen Sätzen sind bereits früher (LXXXX, a u. CXXI, b) bewiesen worden.

Unter dem Winkel des größern Abschnittes CBAC wird hier jener Winkel verstanden, welcher von dem Bogen CBA und von der Sehne AC gebildet wird und folglich ein gemischtliniger ist. Eben so ist der Winkel des kleinern Abschnitts CDAC jener gemischtlinige Winkel, welcher von dem Bogen CDA und der Sehne CA gebildet wird.

CXXXII. Zum 32. Satze. a) Wenn die willkührlich gezogene Linie BD selbst lothrecht auf EF steht, so ist die Behauptung des Satzes von selbst einleuchtend.

b) Wenn AB (Fig. 333.) eine Tangente und AD eine Sehne des Kreises EDA ist, so ist der Winkel DAB, welchen letztere mit ersterer bildet, die Hälfte jenes Mittelpunctswinkels DCA, welcher auf dem durch die Sehne abgeschnittenen Bogen DFA steht. Denn wenn ED gezogen wird, so ist $\measuredangle AED = \measuredangle DAB$, weil $\measuredangle E + \measuredangle CAD = R = \measuredangle CAD + \measuredangle DAB$; allein $\measuredangle AED = \frac{1}{2} \measuredangle ACD$; folglich auch $\measuredangle DAB = \frac{1}{2} \measuredangle ACD$.

CXXXIII. Zum 33. Satze. Von diesem Satze theilen wir folgende einfachere Auflösung mit.

Wenn (Fig. 334.) AB die gegebene Linie und der Winkel des Abschnitts ein rechter ist, so darf nur AB in C halbirt, aus C die CD lothrecht darauf errichtet und der Halbkreis ADB beschrieben werden, welcher der zufindende Kreisabschnitt ist.

Ist aber AB (Fig. 335.) die gegebene Linie und $PQV < R$ der gegebene Winkel, so halbire man AB in D, errichte das willkührliche Loth FDE auf dieselbe und lege an AD in A einen $\measuredangle DAC = R - \measuredangle PQV = \measuredangle HQP$, dessen Schenkel AC die DF in C schneidet. Zieht man nun CB, so ist, wegen $\triangle CDA \cong \triangle CDB$, auch $CB = CA$ und der aus C mit CA beschriebene Kreis muß durch B gehen. Wird nun M willkührlich genommen und AM, MB gezogen, so ist $\measuredangle AMB = \frac{1}{2} \measuredangle ACB = \measuredangle ACD = R - \measuredangle DAC = R - \measuredangle HQP = \measuredangle PQV$. Folglich ist AFBA der verlangte Abschnitt.

Wäre der gegebene Winkel des Abschnitts, oder $\measuredangle PQN > R$, so verlängere man NQ nach V und bilde nach dem Ebenbewiesenen den Abschnitt AFBA, worin $\measuredangle AMB = \measuredangle PQV$ ist, so muß ABEA der andere Abschnitt seyn, worin $\measuredangle ANB = \measuredangle PQN$ ist, da $\measuredangle M + \measuredangle N = 2R$.

CXXXIV. Zum 34. Satze. Man bemerke auch folgende Auflösung. Wenn in dem Kreise um C (Fig. 336) ein Segment soll construirt werden, worin sich ein gegebener Winkel H befindet, so ziehe man CA willkührlich, mache $\measuredangle ACD = \measuredangle H$ und $\measuredangle DCB = \measuredangle H$, so ist $\measuredangle ACB = 2 \measuredangle H$. Zieht man

nun AB, so ist, da ∢E = ½ ∢ACB, nun auch ∢E = ∢ ACD.

Wäre der gegebene Winkel ein rechter, so müßte man in dem Kreise einen Durchmesser ziehen. Wäre er aber stumpf, so müßte man das Segment für seinen spitzen Nebenwinkel finden, wodurch auch jenes für den stumpfen Winkel construirt ist, weil beide zusammen den ganzen Kreis umschließen.

CXXXV. Zum 35. Satze. a) Dieser Satz kann durch folgenden Hülfssatz bewiesen werden.

Wenn (Fig. 337.) in dem Kreise um C eine willkührliche Sehne AD in B beliebig getheilt ist, und nebst der Verbindungslinie CB noch der Halbmesser CA gezogen wird, so ist das Rechteck aus AB und BD nebst dem Quadrate von CB dem Quadrate des Halbmessers CA gleich.

Zieht man das Loth CE, so ist AE = ED = AB + BE und BD = AE + BE folglich

$$AB^2 + AB \times BE = AE \times AB \text{ allein}$$

$$BE^2 + CE^2 = CB^2, \text{ folglich}$$

$$AB^2 + AB \times BE + BE^2 + CE^2 = AE \times AB + CB^2, \text{ ferner ist}$$

$$AB \times BE = AB \times BE, \text{ daher}$$

$$AB^2 + 2AB \times BE + BE^2 + CE^2 = AE \times AB + AB \times BE + CB^2$$

$$AB^2 + 2AB \times BE + BE^2 + CE^2 = AC^2, \text{ daher}$$

$$AC^2 = AE \times AB + AB \times BE + CB^2; \text{ allein}$$

$$AE \times AB + BE \times AB = BD \times AB, \text{ daher}$$

$$AC^2 = AB \times BD + CB^2.$$

b) Wenn nun die beiden Sehnen (Fig. 338.) AD und EF sich in B schneiden, so ist, wenn man die Verbindungslinie CB und die Halbmesser CA und CE zieht (nach a).

$$CA^2 = AB \times BD + CB^2 \text{ und}$$

$$EC^2 = CA^2 = EB \times BF + EB^2, \text{ folglich}$$

$$AB \times BD + CB^2 = EB \times BF + CB^2 \text{ und daher}$$

$$AB \times BD = EB \times BF.$$

Wenn die beiden Linien durch den Mittelpunct des Kreises gehen, so ist der Satz von selbst einleuchtend.

CXXXVI. Zum 36. Satze. a) Anderer Beweis des ersten Falles. Hier ist

$DB^2 = DE^2 - EB^2$, oder
$DB^2 = DC^2 + 2DC \times CE + CE^2 - EB^2$ oder
$DB^2 = DC^2 + 2DC \times CE$, folglich
$DB^2 = DC^2 + DC \times 2CE$ oder
$DB^2 = DC \times (DC + 2CE)$ d. h.
$DB^2 = DC \times DA$.

b) Der zweite Fall kann auf ähnliche Art bewiesen werden.

c) Ueberhaupt ist nunmehr folgender Satz bewiesen: Wenn von einem Puncte ausserhalb des Kreises beliebig viele gerade Linien so nach demselben gezogen werden, daß jede denselben in zwei Puncte schneidet, so sind alle, von diesen ganzen Linien und ihren ausser dem Kreise liegenden Stücken gebildeten Rechtecke einander gleich und jedes derselben ist so groß als das Quadrat der von dem willkührlichen Puncte nach dem Kreise gehenden Tangente.

d) Sollte also ein Rechteck, dessen Seiten (Fig. 105) AD und CD wären, in ein ihm gleiches Quadrat verwandelt werden, so beschreibe man über $AC = AD - CD$ einen Kreis und ziehe aus D an ihn die Tangente DB, so ist $DB^2 = DA \times DC$.

CXXXVII. Zum 37. Satze. a) Man sieht sogleich, daß dieser Satz der umgekehrte des vorigen ist, und auch indirect bewiesen werden kann.

b) Der nicht mit gehöriger Klarheit bestimmte Ausdruck: Wenn die Linie DB den Kreis trifft, kann durch folgende Darstellung umgangen werden. Wenn bei der, den Kreis in den Puncten C und A schneidenden Linie DA das Rechteck aus DC und DA dem Quadrate einer Linie DB gleich ist, so werden die Puncte B und E, welche man findet, wenn man mit DB aus D einen Kreis beschreibt, welcher den gegebenen Kreis in diesen Puncten schneidet, eine solche Lage haben, daß DB und DE zwei Tangente dieses Kreises sind. Daß der aus D mit DB beschriebene Kreis den gegebenen schneiden muß, folgt daraus, weil DB nothwendig $> DC$ u. $< DA$ ist. Denn die Seite eines Quadrats, welches einem Rechtecke gleich ist, muß größer als dessen kleinere und kleiner als dessen größere Seite seyn.

Anmerkungen
zum
vierten Buche des Euclides.

CXXXVIII. Zur 1. Erklärung. Diese Erklärung ist eine Sacherklärung, da solche einbeschriebene geradlinige Figuren leicht construirt werden können. Nimmt man z. B. in jeder Seite eines gegebenen Dreiecks einen beliebigen Punct und verbindet je zwei derselben mit einer geraden Linie, so entsteht ein einbeschriebenes Dreieck; auf ähnliche Art im Vierecke ein Viereck, im Fünfecke ein Fünfeck und überhaupt im n Ecke wieder ein n Eck.

CXXXIX. Zur 2. Erklärung. Obwohl diese Erklärung die umgekehrte der vorigen ist, so muß die Construction solcher umschriebenen Figuren jedesmal wissenschaftlich nachgewiesen werden.

Soll z. B. um das Dreieck (Fig. 339) ABC ein anderes Dreieck beschrieben werden, so sei $\measuredangle ACB < R$. Errichtet man nun durch C auf AC ein willkührliches Loth CD und zieht AD, so ist $\measuredangle D < R$. Da nun auch $\measuredangle BCE < R$ ist, so muß ein aus B auf DCF gefälltes Loth in die verlängerte DC treffen z. B. in E. Werden nun die Linien DA und EB über A und B verlängert, so müssen sie sich, weil $\measuredangle D + \measuredangle E < 2R$, einmal in H durchschneiden. Folglich ist HDE das umschriebene Dreieck.

Auf ähnliche Art läßt sich die Construction eines umschriebenen Vierecks u. s. f. nachweisen.

CXXXX. Zur 3. Erklärung. Diese Erklärung ist eine Sacherklärung, da die Construction jeder geradlinigen Figur in den Kreis, sobald nur eine bestimmte Seitenzahl verlangt wird, sehr einfach ist. Weil nämlich keine drei Puncte der Peripherie in gerader Linie liegen, so entsteht aus der beliebigen Annahme von drei Puncten und aus den drei Verbindungslinien ein einbeschriebenes Dreieck. Nimmt man vier Puncte im Umfange und verbindet jeden mit seinem benachbarten durch eine gerade Linie, so entsteht ein einbeschriebenes Viereck; aus fünf solcher Puncte erhält man ein einbeschriebenes Fünfeck und aus n Puncten ein geradliniges n Eck im Kreise.

CXXXXI. Zur 4. Erklärung. Um diese Erklärung zur Sacherklärung zu machen, muß gezeigt werden, wie solche um den Kreis beschriebene geradlinige Figuren entstehen können. Um dieses hier schon an einem Beispiel zu zeigen, sei (Fig. 340.) ADB der gegebene Kreis, um welchen ein Dreieck beschrieben werden soll. Man ziehe nach Belieben einen Halbmesser CA, auf ihn eine Tangente FAG für den Punct A; dann unter einem willkührlichen Winkel ACD den Radius CD, und an D die Tangente FDE, welche, gehörig verlängert, die GF in F schneiden muß, weil $\measuredangle DAF + \measuredangle ADF < 2R$. Wird auf ähnliche Art der Halbmesser CB so gezogen, daß er sowohl mit CA als mit CD einen Winkel ACB und DCB bildet, so muß auch die durch B gelegte Tangente jede der zwei andern, FG in G und FE in E schneiden, wodurch ein Dreieck FGE entsteht, welche um den Kreis ADB beschrieben ist.

Auf ähnliche Art könnte auch ein Viereck, Fünfeck, Sechseck u. s. w. um den Kreis construirt werden.

CXXXXII. Zur 5. Erklärung. Insofern man so eben die Möglichkeit erkannt hat, eine geradlinige Figur um einen Kreis zu beschreiben, ist auch im Allgemeinen erwiesen, daß ein Kreis in eine solche Figur kann construirt werden. Allein die Fragen: Wie kann in jedes gegebene Dreieck ein Kreis beschrieben werden? Kann in jedes Viereck ein Kreis beschrieben werden? Wie muß dieses Viereck, oder überhaupt eine gerad-

linige Figur beschaffen seyn, in welche ein Kreis beschrieben werden soll? können nicht ohne besondere wissenschaftliche Hülfssätze beantwortet werden.

CXXXXIII. Zur 6. Erklärung. Da es leicht ist, in einen gegebenen Kreis irgend eine geradlinige Figur von bestimmter Seitenzahl zu beschreiben (CXXXX.), so ist auch insofern die Möglichkeit des um eine geradlinige Figur beschriebenen Kreises erkannt. Allein, wie wird um ein gegebenes Dreieck ein Kreis beschrieben? Kann um jedes Viereck, Fünfeck u. s. f. ein solcher construirt werden, oder was müssen diese Figuren für Eigenschaften haben, damit dieses möglich ist? — Diese Fragen muß die geometrische Wissenschaftslehre beantworten.

CXXXXIV. a) Zur 7. Erklärung. Diese Erklärung heißt auch soviel, als: eine gerade Linie ist in einen Kreis getragen, wenn sie als Sehne dieses Kreises construirt ist. — Nach allem ist klar, daß sie nicht größer als der Durchmesser des gegebenen Kreises seyn darf. Ist sie kleiner als der Durchmesser, so lehrt der folgende 1. Satz ihre Auflösung.

b) Sollte aber die gegebene gerade Linie HJ (Fig. 341) nicht in einen gegebenen Kreis, sondern in einen Kreis überhaupt eingetragen werden, so dürfte man sie nur in C halbiren, aus C auf HJ das unbestimmte Loth CM errichten und in ihm den willkührlichen Punct D nehmen, so wird der mit DH aus D beschriebene Kreis auch durch J gehen. — Nimmt man andere Puncte in CM, so gibt es unzählig vielerlei Kreise, für welche die gegebene Linie HJ eine Sehne ist.

CXXXXV. Zum 1. Satze. a) Sobald man einsieht, daß der aus C mit CE = D beschriebene Kreis den Kreis ABF in zwei Puncten schneiden muß, so ist auch die Auflösung begründet. Die Nothwendigkeit dieses Durchschnitts geht aber sogleich daraus hervor, daß sich der Punct E innerhalb des gegebenen Kreises befindet. Auch entspricht sowohl die Sehne CA, als die Sehne CF der Aufgabe.

b) Man bemerke hierbei folgende Aufgabe. Es ist (Fig. 342) der Kreis NBDM und ein Punct A ausserhalb desselben

gegeben. Man soll durch A eine den Kreis schneidende Linie ABD so ziehen, daß die Sehne BD eine bestimmte Größe, kleiner als der Durchmesser MF, erhält.

Wir theilen folgende Auflösung mit. Man ziehe ACM, trage von M nach N die MN, welche der gegebenen Linie PQ gleich ist, ziehe aus C auf MN das Loth CH, beschreibe über AC aus der Mitte E den Halbkreis CJLA, trage CH aus C nach J und ziehe AJD, so ist BD = PQ.

Denn da hier ∢ CJA = R, so ist DJ = JB. Allein, wegen CM = CD und CH = CJ ist auch △ CHM ≅ △ CJD, folglich HM = JD und daher denn MN = DB; somit auch PQ = DB.

CXXXXVI, A. Zum 2. Satze. Durch Hülfe dieses Satzes kann auch in jeden gegebenen Kreis ein gleichseitiges Dreieck beschrieben werden, oder auch ein gleichschenkeliges, welches mit einem gegebenen gleichschenkeligen Dreiecke gleiche Winkel hat. Enthält das gegebene Dreieck einen rechten Winkel, so ist die Auflösung noch einfacher, da die eine Dreiecksseite nunmehr Durchmesser des gegebenen Kreises werden muß.

CXXXXVI, B. Zum 3. Satze. Auch kann diese Auflösung auf folgende Art aufgelöset werden. Wenn (Fig. 343) ABC das gegebene Dreieck und DEF der gegebene Kreis ist, um welchen ein ihm gleichwinkeliges Dreieck construirt werden soll, so beschreibe man in diesen Kreis ein ihm gleichwinkeliges Dreieck JGH (2. Satz) ziehe aus dem Mittelpuncte des Kreises O die Lothe OD, OE und OF auf dessen drei Seiten, verlängere sie bis zur Peripherie in D, E und F und ziehe durch diese Puncte die Tangenten ML, MK und KL, welche sich in L, K und M durchschneiden müssen, so ist MLK das zu bildende Dreieck.

CXXXXVII. Zum 4. Satze. a) Zöge man hier die gerade Linie AD, so wäre, wegen DE = DG, ∢ DEA = ∢ DGA = R und AD = AD, nunmehr △ ADE ≅ △ ADG und ∢ EAD = ∢ GAD. Wenn daher die drei Winkel eines gegebenen Dreiecks halbirt werden, so müssen die drei geraden Linien, welche dieses bewirken, sich in einem Puncte inner-

halb des Dreiecks durchschneiden, welches der Mittelpunct des in dasselbe zu construirenden Kreises ist.

b) Da die Dreiecke ADB, BDC und CDA einerlei Höhe = DE = DF = DG haben, so ist das gegebene Dreieck ABC einem andern Dreiecke an Flächenraum gleich, welches seinen Umfang AB + BC + CA zur Grundlinie und den Halbmesser seines einbeschriebenen Kreises zur Höhe hat.

CXXXXVIII. Zum 5. Satze. a) Die Auflösung dieser Aufgabe ist bereits oben (CX, a.) vorgekommen, indem jede drei, nicht in gerader Linie liegenden Puncte nothwendig ein Dreieck bestimmen. Euclides setzt indessen die Lage des Mittelpuncts dieses zu bildenden Kreises besonders aus einander, welcher bei spitzwinkeligen Dreiecken innerhalb, bei stumpfwinkeligen ausserhalb ihrer Ebene und bei rechtwinkeligen in die Mitte ihrer Hypotenuse fällt.

b) Denkt man sich aus F (Fig. 112) ein Loth auf BC, so wird BC hierdurch halbirt, so wie auch das aus der Mitte von BC auf sie errichtete Loth durch F gehen muß. Wenn daher aus der Mitte jeder Dreiecksseite ein Loth auf sie errichtet und jedes derselben gehörig verlängert wird, so müssen sich diese drei Lothe in einem Puncte durchschneiden.

CXXXXIX. Zum 6. Satze. a) Auch ist klar, daß der Kreis durch diese Construction in vier gleiche Ausschnitte getheilt wird, deren jeder ein Flächenquadrant ist.

b) Sollte in den mit CA (Fig. 344) beschriebenen Kreis ein Rechteck construirt werden, wozu eine Seite MN $<$ 2CA gegeben ist, so trage man diese gegebene Linie MN als Sehne BD in den Kreis, halbire sie in J, errichte das Loth JC, welches beiderseits bis H und A verlängert, zum Durchmesser HA wird, mache CG = CJ, ziehe durch G die EF mit BD gleichlaufend und die Verbindungslinien EB und FD, so ist EFDB das verlangte Rechteck.

Denn da EF mit BD parallel ist, so muß ∢ CGE = ∢ CGF = R und folglich EF = BD seyn. Daher ist EFDB ein Parallelogramm, und, weil GF = JD, auch ∢ FGJ = ∢ DJG = R, ebenso ∢ F = R; daher FEBD ein Rechteck.

CL. Zum 7. Satze. a) Daß die durch A, B, C und D gezogenen Tangenten sich in den Puncten G, H, K und F durchschneiden müssen, ist daraus klar, weil eine von A nach B gezogene Linie AB zwei Winkel BAG und ABG bildet, welche zusammen kleiner als zwei rechte sind.

b) Da AC = GH, so ist die Seite des um den Kreis zu bildenden Quadrats dem Durchmesser dieses Kreises gleich.

c) Denkt man sich die geraden Linien AB, BC, CD und DA, so ist ABCD das in den Kreis construirte Quadrat. Da nun dieses innere Quadrat aus vier, das äussere Quadrat aber aus acht gleichschenkeligen rechtwinkeligen Dreiecken besteht, deren jedes dem Dreiecke AEB congruent ist, so muß jenes Quadrat die Hälfte von diesem seyn.

d) Soll um den Kreis (Fig. 345) JKHG eine Raute beschrieben werden, so ziehe man einen willkührlichen Durchmesser KG, durch G und K auf ihn die unbestimmten Lothe FGA und BKE, ziehe einen zweiten Durchmesser JCH unter einem willkührlichen spitzen Winkel KCJ und lege durch J und H die Lothe BJA und FHE, welche die vorigen in B, E, F und A schneiden, so ist BEFA eine Raute.

Denn wenn man CE, CF, CA und CB zieht, so sieht man leicht, daß $\triangle$ ECK $\cong$ $\triangle$ ECH; $\triangle$ BCK $\cong$ $\triangle$ BCJ und folglich EK + KB = EH + HF d. h. EB = EF ist. Da ferner, wegen $\measuredangle$ GKE = $\measuredangle$ KGA = R die BE mit AF, und wegen $\measuredangle$ HJA = $\measuredangle$ JHE = R, die BA mit EF parallel ist, so muß BEFA ein Parallelogramm und, wegen BE = EF, eine Raute seyn.

CLI. Zum 8. Satze. Sollte in die Raute (Fig. 345.) BEFA ein Kreis beschrieben werden, so ziehe man die Diagonalen AE und BF und aus ihrem Durchschnittspuncte C die Lothe CG, CH, CK und CJ auf AF, FE, EB und BA, so ist C der Mittelpunct und jedes dieser Lothe Halbmesser des zu findenden Kreises.

Denn da $\measuredangle$ CAB = $\measuredangle$ CAF, $\measuredangle$ CJA = $\measuredangle$ CGA = R und CA = CE ist, so muß $\triangle$ AJC $\cong$ $\triangle$ AGC und folglich CJ = CG seyn. Auf ähnliche Art ist auch CK = CH. Da aber

auch ∢ CFG = ∢ CFH, ∢ CGF = ∢ CHF = R und CF = CF ist, so muß auch CG = CH und somit auch CJ = CK seyn. Folglich ist CG = CJ = CK = CH und da bei J, K, H und G rechte Winkel sind, so müssen AB, BE, EF und FA Tangenten des aus C mit CG construirten Kreises seyn. — Daß CG mit CK und CH mit CJ eine gerade Linie bildet, folgt aus dem Parallelismus von BE und AF und von BA und EF.

CLII. Zum 9. Satze. a) Soll um ein gegebenes Rechteck EFDB (Fig. 344) ein Kreis beschrieben werden, so halbire man EF in G, BD in J, ziehe GJ und halbire sie in C, so ist C Mittelpunct und CE Halbmesser des zu findenden Kreises. Denn wenn man sich die vier Linien CE, CB, CD und CF denkt, so müssen die Dreiecke EGC, CGF, DJC und BJC einander congruent seyn, weil sie zwei Seiten und den von ihnen eingeschlossenen rechten Winkel gemein haben. Daher ist CE = CF = CD = CB. — Hieraus sieht man, daß um jedes gegebene Rechteck ein Kreis beschrieben werden kann.

b) Um eine Raute kann kein Kreis beschrieben werden. Denn da die Raute (Fig. 345) BEFA theils spitze, theils stumpfe Winkel enthält, so muß, wenn die Diagonale BF durch die Scheitel der stumpfen Winkel gezogen wird, ∢ EBF = ∢ EFB und folglich EBF ein spitzwinkeliges Dreieck seyn und der durch B, F und E gehende Kreis muß in CE seinen Mittelpunct haben. Daher muß derselbe immer weiter von A als von E entfernt seyn und ein Kreis durch E, B und F kann nicht durch A gehen.

CLIII. Zum 10. Satze. Da in dem △ FGH, wie bekannt, ∢ F + ∢ G + ∢ H = 2R und ∢ G = ∢ H, so ist auch ∢ F + 2 ∢ G = 2R und da ∢ F = $^1/_2$ ∢ G, so ist $^1/_2$ ∢ G + 2 ∢ G = 2R, folglich $\frac{5}{2}$ ∢ G = 2R und G = $\frac{4\,R}{5}$. Da nun alle um den Mittelpunct eines Kreises her liegende Winkel zusammen = 4R sind, so würde die Größe des Winkels G gefunden werden, wenn man den Umkreis in fünf gleiche Theile eintheilen könnte.

Da $\measuredangle G = {}^4/_5 R$ und $\measuredangle F = {}^1/_2 \measuredangle G$, so ist $\measuredangle F = {}^4/_{10} R = {}^2/_5 R$ und dieser Winkel könnte construirt werden, wenn der Quadrant in fünf gleiche Theile getheilt wäre.

CLIV. Zum 11. Satze. Da, nach dem Beweise, im Dreiecke FGH der $\measuredangle G = \frac{4R}{5}$ ist, so kann an den Mittelpunct des gegebenen Kreises ABCDE ein solcher Winkel $= \measuredangle G$ gelegt und die ihm zugehörige Sehne gezogen werden. Diese, fünfmal im Kreise herumgetragen, gibt ebenfalls das regelmäßige Fünfeck in demselben, wie leicht einzusehen ist.

CLV. Zum 12. Satze. a) Daß sich die durch A, B, C, D und E gezogenen Tangenten in den Puncten H, K, L, M und G durchschneiden müssen, folgt daraus, daß, wenn AB gezogen würde, $\measuredangle HAB + \measuredangle HBA < 2R$ seyn muß. Die Congruenz der Dreiecke FBK und FCK folgt auch daraus, daß $FB = FC$, $\measuredangle FBK = \measuredangle FCK = R$ und $FK = FK$ ist.

b) Da Euclides hier die Construction eines regelmäßigen Fünfecks in und um einen gegebenen Kreis gelehrt hat, so entsteht noch die Frage, wie eine solche Figur über eine gegebene Linie als Seite derselben zu construiren ist.

Wäre nun (Fig. 120) CD diese gegebene Linie, so bilde man ein gleichschenkeliges Dreieck FGH, worin $\measuredangle G = \measuredangle H = 2 \measuredangle F$, mache $\measuredangle DCA = \measuredangle G$ und $\measuredangle CDA = \measuredangle G$, so entsteht ein Dreieck ACD, welches dem Dreiecke FGH gleichwinkelig ist. Wird nun um dieses Dreieck ACD ein Kreis beschrieben, dann $\measuredangle ACD$ durch CE, $\measuredangle ADC$ durch DB halbirt und von A nach B die AB, von B nach C die BC, von A nach E die AE und von E nach D die ED gezogen, so ist ABCDE das verlangte regelmäßige Fünfeck über der gegebenen Seite CD.

CLVI. Zum 13. Satze. a) Das regelmäßige Fünfeck, welches dieser Satz voraussetzt, kann nun nach dem Vorigen leicht beschrieben werden.

b) Eine andere Auflösung dieser Aufgabe, wozu man sich noch die geraden Linien AC, AD, BD, BE denken muß, beruht auf folgenden Sätzen:

1. △ ABC ≋ △ AED, also AC = AD und das von A auf CD gezogene Loth macht CK = DK.

2. △ EBD ≋ △ CAD (3 gleiche Seiten) und das Loth von B auf DE macht DL = EL.

3. △ FDK ≋ △ FDL (2 Seiten und R) also FK = FL, FB = FA, △ FDB ≋ △ FDA (3 gleiche Seiten) ∡ FDB = ∡ FDA, also ist DFG ein Loth auf AB, und BG = AG, △ BGF ≋ △ DLF (1. S. u. die W.) FG = FL = FK und FB = FD = FA.

4. Zieht man FE, so ist △ FLE ≋ △ FLD (2. S. u. R) FE = FD. Zieht man FC, so ist △ FKC ≋ △ FHD (2. S. u. R) FC = FD = FB = FA, aber BE = EC, also EFH ein Loth auf BC und BH = CH.

5. △ FCH ≋ △ FCK (1. S. u. die W.) also FH = FK = FL = FG.

6. Wegen FE = FA und CA = CE muß CFM ein Loth auf AE seyn, also △ FEM ≋ △ FEL (2. S. u. R) daher FM = FL = FK = FH = FG und der aus F mit FM beschriebene Kreis muß die Fünfecksseiten in M, L, K, H und G berühren, welche dessen Tangenten durch diese Puncte sind. Folglich ist hierdurch ein Kreis in das gegebene regelmäßige Fünfeck beschrieben.

CLVII. Zum 14. Satze. a) Nämlich, da der Winkel BCD durch CF und Winkel EDC durch DF halbirt worden ist, so ist auch in den Dreiecken FCB und FCD die CB = CD, FC = FC und ∡ FCB = ∡ FCD, folglich FB = FD und ∡ FBC = ∡ FDC = ½ ∡ ABC. Daher ist wieder ∡ FBC = ∡ FBA, CB = AB und FB = FB, somit FA = FC. Auf ähnliche Art ist auch FE = FA und der mit FC aus F beschriebene Kreis muß durch die Puncte A, B, C, D, E gehen.

b) Auch kann leicht bewiesen werden, daß das um den Kreis beschriebene regelmäßige Fünfeck mit dem in denselben beschriebenen regelmäßigen Fünfecke einerlei Mittelpunct habe.

c) Da die Dreiecke CFD, DFE, EFA, AFB und BFC einander congruent sind, so ist das regelmäßige Fünfeck einem Dreiecke gleich, dessen Grundlinie seinem Umfange und dessen

Höhe einem Lothe gleich ist, welches von seinem Mittelpuncte auf eine seiner Seiten gezogen wird. Dieses Dreieck kann leicht construirt werden.

d) Auch ist klar, daß der Mittelpunct des regelmäßigen Fünfecks gefunden wird, wenn man von zwei willkührlichen Winkelpuncten auf ihre gegenüberliegenden Seiten zwei Lothe zieht. Ihr Durchschnittspunct ist dieser Mittelpunct.

CLVIII. Zum 15. Satze. a) Hieraus folgt, daß der Halbmesser eines Kreises zugleich auch die Seite des in ihn zu beschreibenden regelmäßigen Sechseckes ist. Um dieses zu bilden, darf also jener nur sechsmal in der Peripherie herumgetragen werden.

b) Soll in den Kreis (Fig. 346) ein regelmäßiges Dreieck beschrieben werden, so bilde man durch den Halbmesser CA das regelmäßige Sechseck ABDEFG und ziehe nun die geraden Linien AF, FD und DA, so ist AFD das gleichseitige Dreieck im Kreise. Denn da Bog. AGF = Bog. FED = Bog. DBA, so ist auch Sehne AF = Sehne FD = Sehne DA.

c) Sollte um den Kreis mit CA ein regelmäßiges Sechseck construirt werden, so ziehe man durch die Puncte A, B, D, E, F und G Tangenten, welche einander durchschneiden müssen und dieses äussere Sechseck bilden. Der Beweis, daß es ein regelmäßiges ist, kann leicht geführt werden.

d) Auf ähnliche Art kann um den Kreis mit CA ein gleichseitiges Dreieck dadurch beschrieben werden, daß man durch A, F und D (die Winkelpuncte des innern gleichseitigen Dreiecks) Tangenten zieht, welche sich in drei Puncten durchschneiden und das verlangte Dreieck erzeugen.

e) Auch können die Aufgaben: In ein regelmäßiges Sechseck und in ein regelmäßiges Dreieck, oder um diese Figuren einen Kreis zu beschreiben, leicht nach dem Vorhergehenden aufgelöset werden.

f) Es muß auch das regelmäßige Sechseck einem Dreiecke gleich seyn, dessen Grundlinie sein Umfang und dessen Höhe das Loth von seinem Mittelpuncte auf eine seiner Seiten ist.

CLIX. Zum 16. Satze. a) Euclides setzt hier voraus, daß man in den gegebenen Kreis ein gleichseitiges Dreieck beschreiben könne, was Er früher nicht unmittelbar gelehrt hat. Eine Auflösung dieser Aufgabe folgt aus IV, 2 S. und eine zweite ist oben (CLVIII, b) gegeben worden.

b) Auf ähnliche Art, wie früher gezeigt worden ist, kann nun auch über jede gegebene Linie ein regelmäßiges Fünfzehneck geometrisch construirt werden.

c) Aus dem Bisherigen geht auch hervor, daß man eine vierfache Reihe von regelmäßigen Vielecken in und um den Kreis, auch über eine gegebene gerade Linie construiren könne, nämlich

1. Reihe	2. Reihe	3. Reihe	4. Reihe
3 Eck	4 Eck	5 Eck	15 Eck
6 Eck	8 Eck	10 Eck	30 Eck
12 Eck	16 Eck	20 Eck	60 Eck
24 Eck	32 Eck	40 Eck	120 Eck
48 Eck	64 Eck	80 Eck	240 Eck

u. s. f.

d) Wie man die Peripherie des Kreises überhaupt in $2^{n}+1$ gleiche Theile eintheilen könne, wenn diese Zahl eine Primzahl ist; also z. B. in 17, 257, 65537 ... gleiche Theile, hat zuerst Gauß (Disquisitiones Arithmeticae, Göttingae, 1801) gelehrt.

Anmerkungen
zum
sechsten Buche des Euclides.

CLX. **Vorerinnerung zu diesem Buche.** a) Da in diesem Buche die Lehre von der Aehnlichkeit der Figuren entwickelt wird, welche nicht ohne Anwendung der Verhältnisse und Proportionen dargestellt werden kann, so hat Euclides im fünften Buche davon gehandelt; so, daß dieses Buch als Vorbereitung zum sechsten anzusehen ist. Indessen sind mehrere Erklärungen zu jenem Buche nicht so befriedigend, daß sie allgemeinen Beifall gefunden hätten; was besonders in Bezug auf die Erklärung der gleichen Verhältnisse geschehen ist, gegen welche mehrfache Bemerkungen gemacht worden sind. Damit sich die Leser selbst hiervon überzeugen können, werden die ersten acht Erklärungen hier mitgetheilt.

b) 1. Erklär. Eine Größe ist ein Theil einer andern, die kleinere nämlich von der größern, wenn die größere sich von der kleinern genau messen läßt.

2. Erklär. Die größere ist ein Vielfaches von der kleinern, wenn sie sich von der kleinern genau messen läßt.

3. Erklär. Ein Verhältniß ist eine gewisse Beziehung, welche zwei gleichartige Größen, in Rücksicht der Größe, auf einander haben.

4. Erklär. Größen haben ein Verhältniß zu einander, wenn sie vervielfältigt, einander übertreffen können.

5. Erklär. Größen haben gleiche Verhältnisse zu einander, die erste nämlich zur zweiten und die dritte zur vierten, wenn bei Vergleichung jedes Gleichvielfachen der ersten

und dritten mit jedem Gleichvielfachen der zweiten und vierten, es sich immer findet, daß, wenn das Vielfache der ersten kleiner oder eben so groß oder größer als das Vielfache der zweiten ist, alsdann auch das Vielfache der dritten im ersten Falle kleiner, im andern eben so groß und im letzten Falle größer, als das Vielfache der vierten ist.

6. Erklär. Wenn Größen gleiche Verhältnisse zu einander haben, so sind sie proportionirt.

7. Erklär. Wenn bei Gleichvielfachen das Vielfache der ersten Größe größer als das Vielfache der zweiten, aber das Vielfache der dritten nicht größer als das Vielfache der vierten ist, so hat die erste zur zweiten ein größeres Verhältniß, als die dritte zur vierten.

8. Erklär. Eine Proportion ist die Einerleiheit (Gleichheit) der Verhältnisse.

c) Da mehrere dieser Erklärungen nicht hinreichende Klarheit und Schärfe besitzen, auch die Lehre von den Verhältnissen und Proportionen in jedem guten Lehrbuche der Arithmetik befriedigend dargestellt ist, so wird der Inhalt dieses fünften Buchs der Elemente hier übergangen, allein der 1. Satz des sechsten Buches nicht nach der Euclidischen Methode, sondern auf eine andere überzeugende Art bewiesen werden.

CLXI. Zur 1. Erklärung des sechsten Buchs.

a) Diese Erklärung der Aehnlichkeit ist eine bloße Worterklärung, da man hier noch nicht einsieht, wie zwei mehrseitige Figuren gleiche Winkel haben können; so, daß zugleich auch die Schenkel dieser Winkel unter sich proportional sind. Doch kann man diese Aehnlichkeit hier schon an zwei gleichseitigen Dreiecken von verschiedener Größe der Seiten erläutern, welche man deshalb ähnliche Dreiecke nennen kann, weil sämmtliche Winkel einander gleich und die Schenkel, welche sie bilden, auch proportional sind, da sie sich wie 1:1 verhalten. Eben so sind auch alle Quadrate von verschiedenen Seiten und alle regelmäßige Vielecke von gleicher Seitenzahl und ungleichen Seitenlinien einander ähnlich. Man könnte noch weiter gehen und über zwei Seiten zweier ungleichen Quadrate zwei gleich-

seitige Dreiecke construiren, wodurch nun zwei Fünfecke entständen, von welchen sich leicht nachweisen läßt, daß sie gleiche Winkel und proportionale Seiten haben. Indessen sind dieses nur Erklärungen besonderer Fälle, welche das Allgemeine dieser Lehre nicht erschöpfen.

b) Aus dem Obigen (LXXV, c) ist bekannt, daß jede zwei gegebene gerade Linien ein gemeinschaftliches Maß haben. Wenn also zwei gerade Linien A und B gegeben sind; so, daß das gemeinsame Maß in A gerade n und in B gerade m mal enthalten ist, so verhält sich A:B = n:m. Wären nun C und D zwei andere gerade Linien, bei welchen, für ein größeres oder kleineres Maß, als zuvor, ebenfalls C:D = n:m wäre, so müßte auch A:B = C:D seyn, und diese vier Linien bildeten eine Proportion.

CLXII. Zur 2. Erklärung. Wenn z. B. in den beiden Parallelogrammen (Fig. 347) ABDF und BCGE die Proportion AB:BC = BE:BD Statt findet, so sagt man, daß diese Seiten im umgekehrten Verhältnisse stehen.

CLXIII. Zur 3. Erklärung. Es ist also die gerade Linie AB (Fig. 348) nach stetiger Proportion getheilt, wenn AB:AC = AC:CB ist. Es muß daher in diesem Falle das Rechteck aus AB und CB dem Quadrate aus AC gleich seyn.

CLXIV. Zur 4. Erklärung. a) Der Begriff der Höhe ist bezüglich auf jenen der Grundlinie. So kann in dem Dreiecke jede Seite als Grundlinie angesehen werden. Ist nun dasselbe spitzwinkelig, so fällt das von der ihr gegenüberstehenden Spitze auf sie gezogene Loth, welches die Höhe des Dreiecks ist, innerhalb seiner Fläche. Ist es rechtwinkelig, so ist jede Cathete, in Bezug auf die andere, als Grundlinie und als Höhe zu betrachten. Nimmt man im stumpfwinkeligen Dreiecke eine von den kleinern Seiten als Grundlinie, so fällt die Höhe ausserhalb des Dreiecks.

b) Bei Parallelogrammen versteht man unter der Höhe den Abstand zweier Parallelseiten. Bei einem Kreisabschnitte ist die Höhe jenes Loth, welches aus der Mitte seiner Sehne errichtet und bis zum Bogen verlängert wird. Bei unregel-

mäßigen Vielecken spricht man nicht wohl von ihrer Höhe überhaupt, sondern von der Höhe jener Dreiecke, in welche sie durch Diagonalen zerlegt werden können.

CLXV. Zur 5. Erklärung. Es seien z. B. folgende Verhältnisse gegeben:

a : b
b : c
c : d
d : e,

so ist das Verhältniß von a:e aus den sämmtlichen gegebenen Verhältnissen zusammengesetzt. Wäre etwa b noch einmal so groß als a, dann c dreimal so groß als b, wieder d fünfmal so groß als c und endlich e zehnmal so groß als d, so müßte e nunmehr 2mal, 3mal, 5mal, 10mal so groß d. h. 300mal so groß als a seyn.

CLXVI. Zum 1. Satze. a) Da der Beweis dieses Satzes, eines der wichtigsten für die Lehre von der Aehnlichkeit der Figuren, hier auf den Begriff der Proportion nach Euclides gegründet ist, so soll derselbe noch auf andere (gewöhnliche) Art geführt werden.

b) Wenn die Dreiecke (Fig. 349) ABC und ECD gleiche Höhe haben, indem z. B. die Verbindungslinie ihrer Spitzen AE mit der Grundlinie BD gleichlaufend ist, so gibt es ein Maß L, welches in BC etwa n und in CD gerade m mal enthalten seyn soll. Daher kann man BC in n und CD in m gleicher Theile theilen, deren jeder = L ist, und das Dreieck ABC wird aus n, so wie Dreieck ECD aus m gleicher Dreiecke bestehen, wenn man von den Spitzen A und E nach jedem Theilpuncte eine gerade Linie zieht. Nennt man eines dieser kleinen Dreiecke d, so ist offenbar

△ ABC = n . d und
△ ECD = m . d, folglich
△ ABC : △ ECD = n.d:m.d = n:m, allein es ist auch
BC:CD = n:m, folglich

△ ABC : △ ECD = BC:CD.

c) Da Parallelogramme die Doppelten der ihnen entsprechenden Dreiecke sind, so gilt eben dieser Satz auch von Parallelogrammen, wenn sie auf verschiedener Grundlinie stehen und einerlei Höhe haben.

d) Wenn zwei Dreiecke (Fig. 350) ABC und DEF einerlei Höhe AG = DJ haben, so verhalten sie sich wie ihre Grundlinien BC und EF. — Denn wenn BC über C und EF über F verlängert wird, bis CH = BG und FK = EJ ist, so ist auch, wenn AH und DK gezogen wird, △ ABC = △ AGH und △ DEF = △ DJK. Allein es ist

△ AGH : △ DJK = GH : JK (b) folglich auch
△ ABC : △ DEF = GH : JK oder
△ ABC : △ DEF = BC : EF.

Eben dieses gilt auch von Parallelogrammen, als den Doppelten dieser Dreiecke.

e) Nennt man bei zwei Dreiecken D und d die Grundlinien G und g, die Höhen H und h und fragt nach dem Verhältnisse von D:d, so nehme man ein drittes Dreieck δ, welches G zur Grundlinie und h zur Höhe hat. Hier ist nun

D : δ = H : h und
δ : d = G : g, folglich
D : d = G × H : g × h,

d. h. Dreiecke von verschiedenen Grundlinien und Höhen stehen in einem zusammengesetzten Verhältnisse aus ihren Grundlinien und Höhen. Wenn daher G × H = g × h oder G : g = h : H ist, d. h. wenn sich ihre Grundlinie umgekehrt wie ihre Höhen verhalten, so sind die Dreiecke gleich am Flächeninhalte.

CLXVII. Zum 2. Satze. a) Daß die durch E mit CB parallel gehende ED die Seite AB durchschneiden müsse, folgt sogleich daraus, daß sie weder die CB schneiden, noch nach A fallen kann.

b) Aus BD : DA = CE : EA folgt auch
BD + DA : DA = CE + EA : EA d. h.
BA : DA = CA : EA oder auch
BA : AC = DA : AE.

c) Werden daher die drei Seiten (Fig. 351.) AB, BC und CA in den Puncten D, E und F halbirt und die Verbindungslinien DE, EF und FD gezogen, so wird das gegebene Dreieck ABC in vier unter sich congruente Dreiecke ADF, DBE, DEF und FEC getheilt, deren zwei aneinander grenzende ein Parallelogramm bilden.

CLXVIII. Zum 3. Satze. a) Wenn in dem Dreiecke BAC die Seite $AB = AC$ ist, so wird die AD, welche $\measuredangle BAD = \measuredangle CAD$ macht, auf BC lothrecht stehen und $\Delta ADB \cong \Delta ADC$ seyn, woraus ohnedies $BD = DC$ folgt.

b) Daß die mit DA parallel gezogene CE die über A verlängerte BA schneiden muß, folgt sogleich daraus, daß $\measuredangle BCE = \measuredangle BDA$, daher $\measuredangle BCE + \measuredangle B < 2R$ ist.

c) Es sei (Fig. 352) ABC ein gleichschenkeliges Dreieck, so ist, wenn man $\measuredangle ABD = \measuredangle CBD$ macht,

$CB : BA = CD : DA$ oder auch

$CB : AC = CD : DA$, folglich

Rechteck $AC \times CD =$ Rechteck $DA \times BC$.

Folglich ist die gegebene Linie AC in zwei Theile getheilt; so, daß das Rechteck aus der ganzen und dem einen Segmente dem Rechtecke aus dem andern Segmente und einer vierten Linie gleich ist.

d) Wäre das Dreieck ABC bei B rechtwinkelig, so würde, wenn $\measuredangle ABD = \measuredangle DBC = \frac{1}{2}R$ gemacht wird, die Hypotenuse AC nach dem Verhältnisse der beiden Catheten CB und BA getheilt, denn es ist $CD:DA = CB:BA$.

CLXIX. Zum 4. Satze. a) Wenn es in diesem Satze heißt, daß die den gleichen Winkeln gegenüberliegenden Seiten homolog sind, so ist dieses mehr als Erklärung der homologen Seiten eines Dreiecks zu betrachten. Denn sollte es eine Behauptung seyn, so müßte früher schon eine Erklärung solcher homologen Seiten voraus gegangen seyn.

b) Der Ausdruck homolog wird sowohl von Seiten als von Winkeln gebraucht, und sowohl bei congruenten als bei ähnlichen Figuren. Wenn (Fig. 4) $\Delta ABC \sim \Delta DEF$

ist, so daß man ∢A = ∢D, ∢B = ∢E und ∢C = ∢F hat, so ist die Seite AB der DE, die AC der DF und die BC der EF homolog, weil sie paarweise gleichen Winkeln gegenüberliegen. Auf gleiche Art sind die Winkel A und D, B und E, C und F homologe Winkel, weil sie den gleichen Seiten entgegenstehen. Ganz auf gleiche Art ist es mit homologen Seiten und Winkeln zweier ähnlichen Dreiecke. Ist z. B. (Fig. 355) △ ABC ∾ △ DEF d. h. ist ∢A = ∢D, ∢B = ∢E und ∢C = ∢F, so sind AB, DE; AC, DF und BC, EF homologe Seiten; ebenso wie die, diesen Seiten gegenüberliegenden Winkel A, D; B, E und C, F homologe Winkel sind.

c) Denkt man sich unter ABC und DEF zwei congruente gleichschenkelige Dreiecke, worin A und D die Spitzen bezeichnen, B und E zur Linken, C und F zur Rechten der Grundlinien stehen und AB = AC = DE = DF ist (und welche man sich leicht verzeichnen wird), so sind AB und DF, obwohl sie den gleichen Winkeln C und E gegenüberliegen, dennoch keine homologen Seiten beider Dreiecke, weil, wenn man sich BC und EF in einer geraden Linie denkt, die BA so von der Linken zur Rechten, wie die DF von der Rechten zur Linken gegen sie geneigt ist. Man kann nun die Lage der BA und FD gegen diese Linie, so wie auch jene der CA und ED eine symmetrische nennen.

d) Auch kann man von einer homologen und symmetrischen Lage ganzer Figuren gegen einander sprechen. Wenn z. B. (Fig. 355) die ähnlichen Dreiecke ABC und DEF eine solche Lage haben, daß ihre homologen Seiten BC und EF entweder in einer geraden Linie liegen oder mit einander gleichlaufend sind, so haben sie dann eine homologe Lage, wenn die homologen Seiten BA, ED nach derselbigen Richtung hin geneigt sind; eine symmetrische Lage dann aber, wenn die homologen Seiten, wie ca und CA, eine entgegengesetzte Richtung haben.

e) Da, nach der frühern Worterklärung, solche Dreiecke ähnliche genennt werden, welche gleiche Winkel und ähnlich

liegende) proportionale Seiten haben, so ist dieser Begriff hierdurch geometrisch begründet und bewiesen, daß zwei Dreiecke einander ähnlich sind, wenn sie, einzeln genommen, zwei gleiche Winkel haben. Denn der dritte Winkel muß nun auch dem dritten gleich seyn.

f) Der Beweis des 4. Satzes kann auch dadurch geführt werden, daß man das Dreieck CDE so in das Dreieck BAC legt, daß D in A, DC längs AB und DE längs AC fällt. Hier muß nun, weil $\sphericalangle DCE = \sphericalangle B$ ist, CE mit BC gleichlaufend seyn, woraus die Proportion $DC : DE = AB : AC$ folgt, u. s. w.

Auch kann der Beweis dieses Satzes leicht indirect geführt werden.

CLX. Zum 5. Satze. a) Hier ist vor Allem zu beweisen, daß, wenn in den Dreiecken ABC und DEF

1) $AB:BC = DE:EF$ und
2) $BC:CA = EF:FD$ ist, nun auch
3) $BA:AC = ED:DF$ seyn müsse.

Man erkennt dieses sogleich daraus, daß, wenn in den ersten zwei Proportionen die ersten, zweiten, dritten und vierten Glieder mit einander multiplicirt werden, eine neue Proportion entsteht, welche im ersten Verhältnisse mit BC, im zweiten mit EF gehoben werden kann. Geschieht nun dieses, so erhält man die dritte Proportion. Gleichwie also aus der Gleichheit zweier Winkel in zwei Dreiecken die Gleichheit der beiden dritten Winkel folgt, so geht auch aus der Proportionalität zweier Seitenpaare jene der dritten Paare hervor.

b) Auch kann der Beweis auf diese Art gegeben werden. Man nehme (Fig. 353) $DG = AB$ und ziehe durch G die GH mit EF parallel. Hier ist $ED : DF = GD : DH$; allein es ist auch $ED : DF = BA : AC$, folglich muß $DH = AC$ seyn. Auf gleiche Art wird bewiesen, daß, wegen

$DE : EF = DG : GH$ und wegen
$DE : EF = AB : BC$, auch

$GH = BC$ ist. Folglich muß auch $\Delta DGH \cong \Delta ABC$ und daher $\sphericalangle D = \sphericalangle A$, $\sphericalangle DGH = \sphericalangle B = \sphericalangle E$ und $\sphericalangle DHG = \sphericalangle C = \sphericalangle F$ seyn.

c) Auch könnte die Wahrheit des 5. Satzes indirect bewiesen werden, wie man leicht selbst finden wird.

d) Wenn also in zwei Dreiecken zwei Paare proportionirter Seiten vorhanden sind, so müssen die Dreiecke ebenfalls einander ähnlich seyn d. h. sie müssen gleiche homologe Winkel haben.

CLXI. Zum 6. Satze. a) Dieser Satz, welcher die dritte Bedingniß zur Aehnlichkeit der Dreiecke enthält, kann auch auf folgende Art bewiesen werden.

Es sei (Fig. 353) BA:AC = ED:DF und ∢A = ∢D, so nehme man DG = AB, DH = AC und ziehe GH. Hierdurch wird nun Δ DGH ≅ Δ ABC und GH mit EF gleichlaufend; folglich ∢DGH = ∢E = ∢B und ∢DHG = ∢F = ∢C, woraus dann ferner AB:BC = DE:EF und AC:CB = DF:FE folgt.

b) Daher sind zwei Dreiecke einander ähnlich:

1) Wenn sie zwei gemeinschaftliche Winkel,

2) Zwei Paare proportionaler Seiten, oder

3) Zwischen einem Paare proportionaler Seiten einen gleichen Winkel haben.

CLXII. Zum 7. Satze. a) Um diesen Satz mit nöthiger Klarheit zu übersehen, bemerke man Folgendes. Es seien (Fig. 354) ABC und DEF zwei gegebene Dreiecke, in welchen ∢A = ∢D und AB:BC = DE:FF ist, so ist der, den Seiten AB und DE gegenüberliegende Winkel ACB und DFE entweder = R, oder < R (Fig. a.) oder > R (Fig. b..)

Im ersten Falle sind die Dreiecke gleichwinkelig und müßten, auch wenn es von AB, BC, DE und EF nicht angenommen wäre, proportionale Seiten haben, da gleichwinkelige Dreiecke auch ähnliche Dreiecke sind.

Im zweiten und dritten Falle nehme man BJ = ED und ziehe JK mit AC gleichlaufend, so ist

AB : BC = JB : BK und auch

AB : BC = JB : EF, folglich

BK = EF und die Dreiecke JBK und DEF haben die Winkel BJK und EDF, die Seiten BJ und ED, und endlich die Seiten BK und EF mit einander gemein.

Wenn man nun das Loth BG auf AC oder auf ihre Verlängerung über C zieht, GH = GC macht und BH zieht, so können aus den drei Stücken AB, BC und ∢A, so wie aus den ihnen entsprechenden JB, BK und ∢BJK die zwei verschiedenen Dreiecke ABC und ABH, ferner JBK und JBM gebildet werden; aber auch nur diese zwei verschiedenen Dreiecke.

Sind daher die, den Seiten AB, JB und DE gegenüberliegenden Winkel ACB, JKB, DFE spitze Winkel, so muß ∢JKB = ∢DFE, folglich △JBK ≋ △DEF und somit △DEF ∾ △ABC seyn.

Sind dagegen die, den bemerkten Seiten AB, JB, DE entgegenliegenden Winkel AHB, JMB, DPE stumpfe Winkel, so muß wieder ∢JMB = ∢DPE, folglich △JBM ≋ △DEP und daher △DEP ∾ △ABH seyn.

b) Wenn daher zwei Dreiecke einen Winkel gemein und zwei Seiten, welche denselben nicht einschließen, proportional haben (wobei eine dieser Seiten die dem gemeinschaftlichen Winkel gegenüberstehende ist) und der, jener andern Seite gegenüberliegende Winkel in beiden Dreiecken ein spitzer oder ein stumpfer ist, so sind die beiden Dreiecke einander ähnlich.

Wäre dieser genannte Winkel ein rechter, so müßten diese Dreiecke, da sie nun gleichwinkelig sind, ohnedies auch ähnliche seyn.

CLXIII. Zum 8. Satze. Hier nur eine Anwendung von diesem sehr folgereichen Satze. Da ED : BA = BA : BC ist, so wird Rechteck BD × BC = Quadrat BA × BA. Da ferner CD : CA = CA : CB, so ist Rechteck CD × CB = Quadr. CA × CA. Folglich muß auch BA × BA + CA × CA = BD × BC + CD × CB oder BA × BA + CA × CA = (BD + CD) × CB d. h. BA × BA + CA × CA = BC × BC seyn, wodurch der pythagorische Lehrsatz auf andere Weise, als früher geschehen ist, begründet wird.

CLXIV. Zum 9. Satze. a) Sollte eine gegebene gerade Linie in eine größere Menge gleicher Theile z. B. in 21 getheilt werden, so theile man sie zuerst in 7 und dann

jedes dieser 7tel wieder in 3 gleiche Theile, denn der 3te Theil vom 7ten Theil ist der 21te Theil des Ganzen.

b) Auch kann durch Hülfe dieses Satzes jeder bestimmte Theil eines Quadrates in ein ihm gleiches Quadrat verwandelt werden. Um z. B. $^3/_5$ eines gegebenen Quadrats in ein Quadrat zu verwandeln, theile man zwei Parallelseiten desselben in fünf gleiche Theile und ziehe durch die Endpuncte der dritten Theilpuncte eine Querlinie, so zerfällt das Quadrat in zwei Rechtecke, wovon das eine $^3/_5$ und das andere $^2/_5$ desselben ist, und deren jedes nach dem Vorhergehenden in ein ihm gleiches Quadrat verwandelt werden kann.

c) Auch läßt sich irgend ein bestimmter Theil, z. B. der $\frac{n}{m}$ Theil eines geradlinigen Vielecks in ein ihm gleiches Quadrat verwandeln. Man verwandle das Vieleck in ein ihm gleiches Rechteck, nehme von diesem den $\frac{n}{m}$ Theil und verwandle ihn in das verlangte Quadrat.

CLXV. Zum 10. Satze. Diese Aufgabe ist eigentlich die allgemeine, von welcher die unmittelbar vorhergegangne nur einen besondern Fall bildet. Sie hat mannigfaltige Anwendungen. Sollte z. B. ein gegebenes Dreieck durch eine Linie von der Spitze auf die Grundlinie nach dem Verhältnisse von 3:5 getheilt werden, so theile man nur die Grundlinie nach diesem Verhältnisse und ziehe von dem Theilpuncte nach des Dreiecks Spitze die Verbindungslinie.

CLXVI. Zum 11. Satze. a) Man erhält durch Auflösung dieser Aufgabe eine stetige geometrische Proportion, wozu das erste und mittlere Glied gegeben ist.

b) Weil aus $AB:AC = AC:CE$ auch $AB \times CE = AC \times AC$ folgt, so ist das Rechteck von AB und CE dem Quadrate von AC gleich. Daher kann durch diese Aufgabe jedes Quadrat in ein ihm gleiches Rechteck verwandelt werden, wozu eine willkührliche Linie als Seite gegeben ist; die andere Seite wird durch die Auflösung gefunden.

CLXVII. Zum 12. Satze. a) Auch könnte man die zweite Linie B, anstatt sie von G nach E zu legen, von D nach F tragen. Nun müßte die dritte Linie C von G nach E hin getragen werden. Daß man hier dieselbige Linie HF als viertes Glied erhält, ist leicht zu beweisen, wenn man die doppelte Zeichnung entwirft.

b) Auch kann jedes gegebene Rechteck leicht in ein anderes verwandelt werden, wozu eine willkührliche Seite gegeben ist. Denn das Rechteck aus A und B muß immer dem Rechtecke aus C und HF gleich seyn.

CLXVIII. Zum 13. Satze. a) Da hier AB:BD=BD:BC ist, so muß das Rechteck aus AB und BC dem Quadrate von BD gleich seyn. Daher kann man durch Anwendung dieser Aufgabe jedes Rechteck in ein ihm gleiches Quadrat verwandeln, wie schon früher, jedoch auf andere Weise, ist gelehrt worden.

b) Auch ist in jedem rechtwinkeligen Dreiecke das Quadrat des aus dem Scheitel des rechten Winkels auf die Hypotenuse gezogene Lothes dem Rechteck aus den beiden Segmenten dieser Hypotenuse gleich.

c) Desgleichen hat der Halbkreis ADC die merkwürdige Eigenschaft, daß das Quadrat eines irgendwo auf AC errichteten, bis zur Peripherie verlängerten Lothes dem Rechtecke aus den beiden Segmenten des Durchmessers gleich ist. Diese Eigenschaft bestimmt die Natur der Kreislinie so genau, daß sie sich hierdurch von jeder andern krummen Linie wesentlich unterscheidet. Daher kann sie als eine Erklärung der Kreislinie angesehen werden.

CLXIX. Zum 14. Satze. Die Construction zweier gleichen Parallelogramme, welche einen gemeinschaftlichen Winkel haben, ergibt sich leicht aus dem 44. Satze des I. Buchs. Daß die über F verlängerte AF und die über E verlängerte CE sich in H schneiden müssen, und daß die hierdurch entstehende Figur FHEB ein Parallelogramm ist, ergibt sich sehr einfach aus früheren Sätzen. Auch kann die Construction der

Hypotheſis des zweiten Theils dieſes Satzes leicht ausgeführt werden, da man nur bei zwei ſich in B ſchneidenden Linien DB : BE = GB : BF machen und die Parallelogramme DF und BC bilden kann.

CLXX. Zum 15. Satze. a) Um zwei Dreiecke zu conſtruiren, welche einander gleich ſind und einen Winkel gemein haben, dürfte man nur zwei gleiche Parallelogramme von dieſer Eigenſchaft, wie in Fig. 140 geſchehen iſt, bilden und in ihnen die Diagonalen FD und EG ziehen, wodurch die beiden Dreiecke FBD und EBG dieſer Hypotheſis des Satzes entſprächen.

b) Auch kann der Beweis von den Dreiecken (Fig. 141) DAE und BAC leicht dadurch geführt werden, daß man die Parallelogramme bildet, von welchen dieſe Dreiecke die Hälfte ſind und nun dieſen Satz auf den 14. Satz zurückführt.

c) Die Hypotheſis des zweiten Theils der Behauptung kann leicht dadurch in der Conſtruction dargeſtellt werden, daß man hier wie zuvor (CLXIX) verfährt.

CLXXI. Zum 16. Satze. Wenn a, b, c und d vier Zahlen bedeuten und es iſt a : b = c : d, ſo muß a × d = b × c ſeyn. Nun kann man ſich unter a × d ſowohl, als unter b × c den Inhalt eines Rechtecks vorſtellen, wenn dieſe Buchſtaben andeuten, wie oft das als Einheit genommene Maß in jeder Seite des Rechtecks enthalten iſt. Folglich ſind die hierdurch entſtehenden Rechtecke ſchon nach dem oben Bemerkten (LXXV) einander gleich.

Wenn umgekehrt die zwei Producte a × d und b × c einander gleich ſind, ſo ſtellen ſie zwei gleiche Rechtecke vor und es muß nun auch a : b = c : d ſeyn.

CLXXII. Zum 17. Satze. Wenn im Allgemeinen a : b = b : c iſt, ſo muß a × c = b × b ſeyn, d. h. das Rechteck aus a und c iſt dem Quadrate von b gleich. Wäre umgekehrt $a \times c = b^2$, d. h. ein Rechteck einem Quadrate gleich, ſo müßte auch a : b = b : c d. h. b die mittlere geometriſche Proportionallinie zwiſchen a und c ſeyn.

CLXXIII. Zum 18. Satze. a) Wann eine geradlinige Figur einer ihr ähnlichen auch ähnlich liegt, hat Euclides

nicht besonders erklärt; kann jedoch keine weitere Schwierigkeiten haben. Wenn (Fig. 355) die Dreiecke ABC und abc einander ähnlich sind, BC mit cb gleichlaufend ist, aber ∢B zur Linken von BC und ∢b = ∢B zur Rechten von cb und eben so ∢C zur Rechten von BC und ∢c = ∢C zur Linken von cb liegt, so hat das Dreieck abc gegen ABC keine ähnliche Lage. Wohl aber ist das Dreieck DEF, welches ebenfalls dem Dreiecke ABC ähnlich ist, zugleich auch diesem Dreiecke ABC ähnlich liegend, da sich zur Rechten von BC und EF der Winkel C = ∢F und zur Linken der Winkel B = ∢E befindet. Auch könnte sich die Linie EF in der Verlängerung von BC befinden. Diese ähnliche Lage ähnlicher Figuren gehört übrigens nicht zu dem Wesen derselben, sondern dient nur zur bequemen Betrachtung derselben.

b) Da, nach der frühern Worterklärung, jene Figuren ähnliche heissen, welche, einzeln genommen, gleiche Winkel und proportionale Seiten haben, so muß beides von den beiden Vierecken AGHB und CFED bewiesen werden.

1) Da ∢ AGB = ∢ CFD und auch
∢ BGH = ∢ DFE, so muß
∢ AGH = ∢ CFE seyn. Da ferner
∢ ABG = ∢ CDF und auch
∢ GBH = ∢ FDE ist, so muß
∢ ABH = ∢ CDE seyn.

2) Da △ AGB ∼ △ CFD, so ist
AG : GB = CF : FD oder
AG : CF = GB : FD. Da auch
△ HGB ∼ △ EFD, so ist
HG : GB = EF : FD, oder
HG : EF = GB : FD; es war aber
AG : CF = GB : FD, folglich ist
AG : GH = CF : FE.

Ganz auf gleiche Art wird bewiesen, daß AB:BH = CD:DE ist.

c) Befände sich über ED noch ein Dreieck, dessen Spitze K heissen soll, so dürfte man nur an BH in H einen Winkel legen, welcher = ∢ DEK und in B einen Winkel = ∢ EDK.

Nennt man den Durchschnittspunct dieser beiden Schenkel mit J, so wäre Δ HBJ $\sim \Delta$ EDK und nun auch das Fünfeck AGHJB ähnlich dem Fünfecke CFEKD.

Ueberhaupt ist hieraus klar, wie man im Allgemeinen ein geradliniges n Eck über eine gegebene Linie construiren kann, welches einem gegebenen n Ecke ähnlich ist.

d) Auch kann über MN (Fig. 356) dadurch ein Vieleck, dem gegebenen ABCDE ähnlich, gebildet werden, daß man Ab $=$ MN macht, aus A die Diagonalen AC, AD und nun durch b die bc mit BC, die cd mit CD und die de mit DE gleichlaufend zieht, wodurch ABCDE $\sim$ abcde.

Denn es ist Δ Abc $\sim \Delta$ ABC; Δ Acd $\sim \Delta$ ACD; Δ Ade $\sim \Delta$ ADE; daher $\measuredangle$ bcA $+ \measuredangle$ Acd $= \measuredangle$ BCA $+ \measuredangle$ ACD d. h. $\measuredangle$ bcd $= \measuredangle$ BCD, und auf gleiche Weise auch $\measuredangle$ cde $=$ CDE, so wie auch $\measuredangle$ Aed $= \measuredangle$ AED. Da

$$Ac : AC = bc : BC \text{ und auch}$$
$$Ac : AC = cd : CD$$

ist, so hat man bc : cd $=$ BC : CD und auf ähnliche Weise cd : de $=$ CD : DE, so wie auch eA : Ab $=$ EA : AB.

Wäre die gegebene Linie MN $>$ AB, so könnte man AB über B verlängern und auf ähnliche Art verfahren.

e) Wäre (Fig. 357) das Sechseck GHJKLM gegeben und man sollte ein anderes construiren, welches ihm ähnlich ist, ohne daß irgend eine Seite desselben gegeben wäre, so nehme man in dieser Figur einen willkührlichen Punct T, ziehe die Linien TG, TH, TJ, TK, TL, TM und verlängere sie über ihre Endpuncte, nehme dann die beliebigen Puncte N und A, ziehe NO, AB parallel mit GH; OP, BC parallel mit HJ; PQ, CD parallel mit JK u. s. f. bis zum Schlusse beider Sechsecke, so ist sowohl NOPQSV als ABCDEF dem gegebenen Sechsecke GHJKLM ähnlich. Denn es ist Δ NTO $\sim$ Δ GTH $\sim \Delta$ ATB; Δ OTP $\sim \Delta$ HTJ $\sim \Delta$ BTC u. s. f. und man wird auch leicht einsehen, daß die durch die Schlußlinien NV, AF entstehenden Dreiecke NTV und ATF ebenfalls dem Dreiecke GTM ähnlich sind. Die weitere Ausführung des Beweises ist dem vorigen ähnlich.

CLXXIV. Zum 19. Satze. Man bemerke hier folgenden Beweis dieses sehr wichtigen Satzes:

a) Die Flächenräume ähnlicher rechtwinkeliger Dreiecke verhalten sich wie die Flächen der über ihre gleichnamige Seiten beschriebenen Quadrate.

Es sei (Fig. 358) in den ähnlichen Dreiecken ABC und FGH, $\measuredangle B = \measuredangle G = R$ und BCED das Quadrat über BC; GHKJ jenes über GH, so ist

$$\Delta ABC : \Delta FGH = BCED : GHKJ.$$

Denn wenn man die Diagonalen CD und HJ zieht, so ist

$$\Delta ABC : \Delta CBD = AB : BD \text{ und}$$
$$\Delta FGH : \Delta HGJ = FG : GJ.$$

Da aber $AB : BD\ (=BC) = FG : GJ\ (=GH)$, so ist auch

$$\Delta ABC : \Delta CBD = \Delta FGH : \Delta HGJ, \text{ daher}$$
$$\Delta ABC : 2\Delta CBD = \Delta FGH : 2\Delta HGJ \text{ oder}$$
$$\Delta ABC : \Delta FGH = BCED : GHKJ.$$

b) Die Flächenräume ähnlicher Dreiecke überhaupt verhalten sich wie die Quadrate ihrer homologen Seiten.

Es seien (Fig. 359) die Dreiecke ABC und EFG einander ähnlich, so ist auch hier

$$\Delta ABC : \Delta EFG = \text{Quadr. } AB : \text{Quadr. } EF.$$

Denn wenn man die Lothe AD und EH zieht, so ist $\Delta ADB \sim \Delta EHF$ und $\Delta ADC \sim \Delta EHG$. Daher hat man

$$\Delta ADB : \Delta EHF = \text{Quadr. } AB : \text{Quadr. } EF \text{ und}$$
$$\Delta ADC : \Delta EHG = \text{Quadr. } AC : \text{Quadr. } EG.$$

Da aber Quadr. BA : Quadr. FE = Quadr. AC : Quadr. EG, so ist auch $\Delta ADB : \Delta EHF = \Delta ADC : \Delta EHG$, und folglich $\Delta ADB : \Delta ADB + \Delta ADC = \Delta EHF : \Delta EHF + \Delta EHG$, d. h. $\Delta ADB : \Delta EHF = \Delta BAC : \Delta FEG$. Da aber auch

$$\Delta ADB : \Delta EHF = \text{Quadr. } AB : \text{Quadr. } EF, \text{ so ist auch}$$
$$\Delta BAC : \Delta FEG = \text{Quadr. } AB : \text{Quadr. } EF.$$

c) Wäre z. B. $EF = \frac{1}{2} AB$, so würde $\Delta BAC : \Delta FEG = 2 \times 2 : 1 \times 1 = 4 : 1$ seyn, d. h. ein Dreieck, welches einem andern ähnlich ist und worin eine Seite noch einmal so groß ist, als die ihr homologe Seite des andern Dreiecks, hat einen viermal größern Flächeninhalt als jenes. Sein Umfang ist aber nur noch einmal so groß.

Ständen diese Seiten im Verhältnisse von 1:n, so würden die Flächen im Verhältnisse von $1 : n^2$ seyn; die Umfänge aber sich wie 1 : n verhalten.

d) Hier bemerke man folgenden höchst einfachen Beweis des Pythagorischen Lehrsatzes.

Es sei BAC (Fig. 359) ein rechtwinkeliges Dreieck und AD das Loth von A auf BC, so ist

$\Delta BDA : \Delta ADC : \Delta BAC =$ Quadr. BA : Quadr. AC : Quadr. BC.

Da nun $\Delta BDA + \Delta ADC = \Delta BAC$ ist, so muß auch Quadr. BA + Quadr. AC = Quadr. BC seyn.

CLXXV. Zum 20. Satze. a) Die Aufgabe: eine Figur zu construiren, welche einer gegebenen ähnlich ist, ist bereits oben (im 18. Satze) aufgelöset worden und wird diesem Satze als Bedingniß vorausgesetzt.

b) Wenn (Fig. 360) ABCDE $\sim$ abcde ist und man zieht die Diagonalen AD, AC und ad, ac, so ist klar, daß beide Fünfecke in gleichviele Dreiecke und in ähnlich liegende Dreiecke getheilt werden. Da nun, nach der Annahme, $\measuredangle E = \measuredangle e$ und AE:ED = ae:ed ist, so ist auch $\Delta AED \sim \Delta aed$ und $\measuredangle EAD = \measuredangle ead$, so wie $\measuredangle EDA = \measuredangle eda$.

Da ferner $\measuredangle B = \measuredangle b$ und auch AB : BC = ab : bc, so ist auch $\Delta ABC \sim \Delta abc$ und $\measuredangle BAC = \measuredangle bac$; auch $\measuredangle BCA = \measuredangle bca$.

Da aber $\measuredangle EAB = \measuredangle eab$, so muß auch $\measuredangle DAC = \measuredangle dac$, und da $\measuredangle BCD = \measuredangle bcd$ ist, auch $\measuredangle ACD = \measuredangle acd$ seyn. Daher denn auch $\Delta DAC \sim \Delta dac$. Daher bestehen ähnliche Vielecke aus ähnlichen Dreiecken.

Nun ist $\Delta AED : \Delta aed = AE^q : ae^q$ *) ferner

$\Delta ADC : \Delta adc = AD^q : ad^q$ und

$AE^q : ae^q = AD^q : ad^q$, folglich

$\Delta AED : \Delta aed = \Delta ADC : \Delta adc$, daher

$\Delta AED : \Delta AED + \Delta ADC = \Delta aed : \Delta aed + \Delta adc$ oder

$\Delta AED : AEDC = \Delta aed : aedc$, daher

$\Delta AED : \Delta acd = AEDC : aedc$, somit

---

*) Der Ausdruck: $AE^q : ae^q$ soll so viel heissen als: Quadrat über AE : Quadrat über ae.

$AEDC : aedc = AE^{\square} : ae^{\square}$. Da aber
$AE^{\square} : ae^{\square} = AB^{\square} : ab^{\square}$, ſo iſt auch
$AEDC : aedc = AB^{\square} : ab$. Allein
$AB^{\square} : ab^{\square} = \Delta ABC : \Delta abc$, folglich
$AEDC : aedc = \Delta ABC : \Delta abc$ und
$AEDC + \Delta ABC : \Delta ABC = aedc + \Delta abc : \Delta abc$ d. h.
$AEDCB : aedcb = \Delta ABC : \Delta abc$, allein
$\Delta ABC : \Delta abc = AB^{\square} : ab^{\square}$, folglich
$AEDCB : aedcb = AB^{\square} : ab^{\square}$.

c) Wäre $AB = 2ab$, ſo würde $ABCDE = 4\,abcde$ ſeyn, und allgemein, wäre $AB = n.ab$, ſo würde $ABCDE = n \times nab$ ſeyn. — Alle Verhältniſſe, welche früher von den Quadraten bewieſen worden ſind (LXXIII, h—k), können nun eben ſo auf ähnliche Vielecke angewendet werden. Sollte z. B. die Seite eines Vielecks gefunden werden, welches dem gegebenen ABCDE ähnlich und die Hälfte deſſelben iſt, ſo halbire man DC in F, errichte das Loth $FG = FD$ und ziehe DG. Macht man nun $DH = DG$, ſo iſt DH die, der Seite DC entſprechende Seite des zu findenden Vielecks. Denn es iſt $DG^{\square} = \frac{1}{2} DC^{\square}$ und das gegebene Vieleck ABCDE verhält ſich zu dem über DH conſtruirten wie $DC^{\square} : DH^{\square}$.

CLXXVI. Zum 21. Satze. a) Die Behauptung dieſes Satzes wird etwas ſchärfer ſo ausgeſprochen: Wenn jede von zwei geradlinigen Figuren derſelbigen dritten ähnlich iſt, ſo ſind auch jene zwei Figuren einander ſelbſt ähnlich.

b) Wäre jedes der beiden Fünfecke (Fig. 360) ABCDE und abcde einem dritten mit $a'b'c'd'e'$ bezeichneten Fünfecke ähnlich, ſo müßte auch $ABCDE \sim abcde$ ſeyn. Denn es iſt

$AB : BC = a'b' : b'c'$ und
$ab : bc = a'b' : b'c'$, folglich
$AB : BC = ab : bc$. Ferner iſt
$BC : CD = b'c' : c'd'$ und
$bc : cd = b'c' : c'd'$, daher
$BC : CD = bc : cd$

und derſelbige Beweis gilt für die Proportionalität der übrigen Seiten.

Ferner ist ∢ ABC = ∢ a′b′c′ und

∢ abc = ∢ a′b′c′, daher auch

∢ ABC = ∢ abc

und ein ähnlicher Beweis kann für alle übrige Winkel geführt werden.

CLXXVII. Zum 22. Satze. a) Der erste Theil dieses Satzes wird sehr einfach so bewiesen. Da

AB : CD = EF : GH ist, so ist auch

AB□ : CD□ = EF□ : GH□. Allein

KAB : LCD : MEFV : NGHW = AB□ : CD□ : EF□ : GH□, folglich auch KAB : LCD = MEFV : NGHW.

b) Der Beweis des zweiten Theils ist der umgekehrte des vorigen und bedarf keiner weitern Auseinandersetzung. — Daß die ähnlichen Figuren auch ähnlich liegend seien, gehört nicht zur Wesenheit des Satzes.

CLXXVIII. Zum 23. Satze. Entweder sind die gegebenen Parallelogramme Rechtecke, wie (Fig. 361) ABDC und DEFG, oder schiefwinkelig, wie HJKL und KMNO.

Im ersten Falle ist, nach dem Frühern,

ABDC = CD × DB und

DEFG = ED × DG, folglich

ABDC : DEFG = CD × DB : ED × DG, oder

ABDC : DEFG = (CD : ED) × (DB : DG).

Im zweiten Falle ziehe man aus K auf HJ das Loth KP, welches, weil HJ mit ON parallel ist, rückwärts nach Q verlängert, auch ein Loth auf ON seyn muß, so ist △ KPJ ∾ △ KQO, weil auch ∢ J = ∢ O ist, folglich hat man

KP : KQ = KJ : KO. Allein

KP × LK = HJKL und ebenso

KQ × KM = KMNO, folglich

HJKL : KMNO = KP × LK : KQ × KM und

HJKL : KMNO = KJ × LK : KO × KM d. h.

HJKL : KMNO = (KJ : KO) × (LK × KM)

CLXXIX. Zum 24. Satze. Dieser einfache Satz kann auch dadurch bewiesen werden, daß man zuerst die Aehnlichkeit der Parallelogramme AEFG und FHCK unter sich und dann

die Aehnlichkeit des einen von ihnen mit dem ganzen Parallelogramme ABCD zeigt.

CLXXX. Zum 25. Satze. Hier ist die gegebene Figur, zu welcher eine ähnliche soll gefunden werden, ein Dreieck. Wäre dieselbe irgend ein anderes geradliniges Vieleck, so könnte dieses zuerst in ein ihm gleiches Dreieck verwandelt und dann ebenso verfahren werden, um das ihm ähnliche Dreieck (von der Größe einer gegebenen Figur) zu finden. Die Seite des ihm gleichen und dem gegebenen Vielecke ähnlichen Vielecks kann dann auch leicht bestimmt werden.

CLXXXI. Zum 26. Satze. a) Auch kann dieser Satz, wie man leicht finden wird, direct bewiesen werden. Eine nothwendige Bedingniß dieses Satzes ist, daß das neugebildete Parallelogramm mit dem gegebenen eine ähnliche Lage habe.

b) Auch gilt die Behauptung des Satzes dann noch, wenn des Parallelogramms ADCB Seitenlinien AD und AB über D und B und so verlängert werden, daß sie diesen Seiten selbst proportional sind. Die Verlängerung der Diagonale AC über C muß dann in den Winkelpunct dieses über die verlängerten Seiten zu beschreibenden Parallelogramms eintreffen.

c) Es könnten auch die Seiten DA und BA über A so verlängert werden, daß diese Verlängerungen diesen Seiten selbst proportional wären, wodurch das neu zu bildende Parallelogramme ausserhalb des gegebenen fiele. Die über A verlängerte CA muß auch Diagonale dieses äussern Parallelogrammes seyn.

CLXXXII. Zum 27. Satze. a) Der erste Theil dieses Satzes kann auch so ausgedrückt werden:

Wenn man des Parallelogrammes VEBA Parallelseiten VE und AB in D und C halbirt, die Linie DC zieht, dann AK > AC willkührlich nimmt, DB und KQ mit AV gleichlaufend und durch den Durchschnittspunct F die GFH mit VE ebenfalls parallel zieht, so ist VDCA > GFKA.

Denn es ist nach dieser Construction

QEHF = LFKC, allein

DEHL > QEHF, folglich

DEHL > LFKC aber
DEHL = VDLG, also
VDLG > LFKC, nun ist
GLCA = GLCA, somit
VDCA > GFKA.

b) Auf ähnliche Art wird auch der zweite Theil bewiesen. Es ist nämlich (Fig. 154)

GFML = VLCD, allein
GFML = HGLK, folglich
VLCD = HGLK und daher
VLCD > HEVK, allein
KVDA = KVDA, daher
KLCA > HEDA.

c) Wenn die willkührliche Linie AB (Fig. 362) in C halbirt, über AC das Quadrat ACDE, über CB das Quadrat CBLD errichtet, jede der Linien AE, CD, BL über E, D, L auch die BD über D verlängert wird, bis ein aus dem willkührlichen Puncte M auf AB errichtetes Loth diese letztere in H schneidet und nun durch H die mit EL parallele FHJK zieht, so ist das Quadrat EDCA größer als das Rechteck FHMA. Allein es ist, wegen $\measuredangle$ DBC = $\frac{1}{2}$R, auch HM = MB; folglich auch das Rechteck FHMA dem Rechtecke aus AM und MB gleich. Daher ist das größte Rechteck, welches aus den Segmenten einer gegebenen Linie AB gebildet werden kann, das Quadrat aus ihrer Hälfte. Denn jedes andere Rechteck aus ihren ungleichen Segmenten muß kleiner seyn.

d) Da das Quadrat EDCA aus den Theilen ENMA und NDCM, das Rechteck FHMA aus den Theilen FHNE und ENMA besteht, so ist jenes um so viel größer als dieses, um wieviel NDCM größer als FHNE ist. Allein NDCM = JKLD = FJDE, folglich ist HJDN der Unterschied von EDCA — FHMA. Allein HJDN ist das Quadrat von ND = MC = AC — AM = $\frac{1}{2}$AB — AM. Daher beträgt der Unterschied zwischen dem Quadrate der Hälfte einer gegebenen Linie und des Rechtecks aus ihren zwei Segmenten

so viel als ein Quadrat, dessen Seite die Differenz zwischen der halben Linie und ihrem kleinern Segmente ist.

e) Auch läßt sich dieser letzte Satz so beweisen. Es sei $AB = a$, $AM = b$, so ist $MC = \frac{1}{2}a - b$ und $MB = a - b$, folglich Rechteck $FHMA = b(a - b) = ab - b^2$, Quadrat $HJDN = \left(\frac{a}{2} - b\right)^2 = \frac{a^2}{4} - ab + b^2$, Quadrat $EDCA = \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4}$ und es ist nun wirklich $ab - b^2 + \frac{a^2}{4} - ab + b^2 = \frac{a^2}{4}$.

CLXXXIII. Zum 28. Satze. Wenn das gegebene Parallelogramm D ein Quadrat ist, so wird diese Aufgabe folgende: Eine gegebene gerade Linie so zu theilen, daß das durch diese Segmente gebildete Rechteck einer gegebenen Figur gleich sei, welche jedoch nicht größer, als das Quadrat aus der halben Linie seyn darf.

CLXXXIV. Zum 29. Satze. a) Wenn das gegebene Parallelogramm D ein Quadrat ist, so kann diese Aufgabe folgendergestalt ausgedrückt werden: An eine gegebene gerade Linie AB ein der gegebenen Figur C gleiches Rechteck so zu beschreiben, daß dieses das gegebene Quadrat als Theil enthält.

Oder so: Die gegebene gerade Linie AB so nach O zu verlängern, daß das aus AB und dieser Verlängerung gebildete Rechteck einer gegebenen Figur gleich ist.

Oder so: Wenn die Linie AB als der Unterschied zweier Rechtecksseiten und die Größe dieses Rechtecks gegeben ist, die Größe dieser Seiten selbst zu finden.

b) Diese beiden Aufgaben (des 28. u. 29. Satzes) dienen vorzüglich als Hülfssätze sowohl im X. Buche des Euclides; als auch in den Büchern des Apollonius von den Kegelschnitten. Daher tadelte Robert Simson zwei frühere Herausgeber der Euclidischen Elemente (Tacquet und Dechales), weil sie diese zwei Sätze, als wären sie fast von keinem Gebrauche, in ihren Ausgaben hinweggelassen hatten.

CLXXXV. Zum 30. Satze. Eine algebraische Auflösung dieser Aufgabe ist bereits oben (LXXXVII, b) mitgetheilt worden.

CLXXXVI. Zum 31. Satze. Der einfachste Fall dieses Satzes ist der, wenn über jeder Seite des rechtwinkeligen Dreiecks ABC ein gleichseitiges Dreieck beschrieben wird. Daß in diesem Falle das über BC construirte so groß sei, als die beiden über AC und AB errichteten zusammengenommen, ist früher (LXXIII, g), ohne die Lehre von der Aehnlichkeit zu Hülfe zu nehmen, bewiesen worden.

CLXXXVII. Zum 32. Satze. Die Hypothesis dieses Lehrsatzes ist zu unbestimmt ausgedrückt und muß etwa so lauten: Wenn (Fig. 363) ein Winkel BAC gegeben ist und man zieht aus C die CD mit BA, dann aus einem willkührlichen Puncte D die DE mit AC gleichlaufend und es ist BA : AC = CD : DE, so liegen die drei Puncte B, C und E in einer geraden Linie.

Wir theilen folgenden indirecten Beweis mit. Wenn man die Verbindungslinie AD zieht, so ist, weil BA mit CD gleichlaufend ist, $\measuredangle o + \measuredangle x + \measuredangle z = 2R$ und weil AC mit DE parallel läuft, auch $\measuredangle x + \measuredangle z + \measuredangle u = 2R$, folglich $\measuredangle o + \measuredangle x + z = \measuredangle x + \measuredangle z + \measuredangle u$ d. h. $\measuredangle o = \measuredangle u$. Sollte nun die über C verlängerte BC nicht nach E gehen, so sei etwa BCF eine gerade Linie. Hier wäre $\measuredangle DFC = \measuredangle ACB$, folglich auch $\triangle DFC \sim \triangle ACB$ und daher denn BA : AC = CD : DF; allein es ist BA : AC = CD : DE. Folglich kann CF keine Verlängerung von BC seyn. Ebensowenig kann CG diese Verlängerung seyn.

CLXXXVIII. Zum 33. Satze. a) Es seien (Fig. 364) in dem Kreise mit CA zwei willkührliche Mittelpunctswinkel ACB und BCD gegeben, so ist entweder der kleinere $\measuredangle$ BCD genau in dem größern $\measuredangle$ ACB enthalten, oder nicht. Im ersten Falle muß, da gleiche Mittelpunctswinkel auch auf gleichen Bogen stehen (III. B. 26. S.), auch der Bogen DB eben so oft in dem Bogen BA enthalten seyn und es ist $\measuredangle$ DCB : $\measuredangle$ BCA = Bog. DB : Bog. BA.

Im zweiten Falle halbire man den $\measuredangle$ DCB, und wenn seine Hälfte kein genaues Maß von $\measuredangle$ BCA wäre, so nehme man $\frac{1}{4}\measuredangle$ DCB, $\frac{1}{8}\measuredangle$ DCB, $\frac{1}{16}\measuredangle$ DCB u. s. f., so ist ein-

mal ein solcher Theil von ∠DCB ein genaues Maß von ∠ BCA oder nicht. Ist Letzteres, so muß der Fehler, welcher bei dem Ausmessen dieses Winkels bleibt, kleiner als das Maß seyn. Allein dieses Maß wird kleiner als jeder anzugebender Winkel; folglich auch jener Fehler und beide Winkel DCB und BCA müssen ein gemeinsames Maß haben, welches sie so genau ausmißt, daß der Fehler kleiner ist, als jeder anzugebender Winkel. Ist Ersteres, so ist's für sich klar.

b) Da $\sphericalangle AEB = \frac{1}{2} \sphericalangle ACB$ und $\sphericalangle BED = \frac{1}{2} \sphericalangle BCD$, so muß auch $\sphericalangle BED : \sphericalangle AEB =$ Bog. DB : Bog. BA seyn. — Da ferner der kleine Mittelpunctswinkel, welcher als Maß der Winkel DCB und BCA anzusehen ist, sowohl die Ebene des kleinern als auch des größern Winkels genau erfüllt, wodurch die Ausschnitte DCB und BCA entstehen, so ist auch Ausschnitt DCB : Ausschnitt BCA = Bog. DB : Bog. BA = ∠DCB : ∠BCA.

c) Hierauf beruht die Methode, die Winkel durch Grade zu messen. Denkt man sich den Quadraten (Fig. 365) BCA in 90 gleiche Theile getheilt (wovon man die Möglichkeit erkennt) und nimmt an, AF sei $\frac{1}{90}$ dieses Linienquadranten, so heißt AF ein Gradbogen. Zieht man FC, so ist $\sphericalangle FCA = \frac{1}{90} \sphericalangle BCA = \frac{1}{90} R$ und es heißt ∠FCA ein Gradwinkel. Daher ist (wenn der Grad durch eine kleine zur Rechten stehende Nulle bezeichnet wird) $R = 90°$; $2R = 180°$; $3R = 270°$ und $4R = 360°$. Einen gegebenen Winkel, z. B. ∠ACG messen, heißt bestimmen, wieviele Gradwinkel seine Ebene ausfüllen.

d) Hieraus ergeben sich noch folgende Sätze:

1) Die Summe zweier Nebenwinkel ist = 180°. Wäre z. B. der eine = 70°, so müßte der andere = 180° — 70° = 110° seyn. Auch ist die Summe mehrerer Nebenwinkel = 180°.

2) Wenn man die Größe eines von zwei Scheitelwinkeln kennt, so ist die Größe jedes andern bekannt. Es sei einer = 40°, so ist sein Nebenwinkel = 180° — 40° = 140°.

3) Alle rings um einen gemeinschaftlichen Scheitelpunct liegenden Winkel sind zusammen = 360°. Auch betragen die

drei Winkel jedes Dreiecks zusammengenommen 180°, denn sie sind = 2R.

4) In jedem rechtwinkeligen Dreiecke ist die Summe der zwei spitzen Winkel = 90°. Wäre z. B. der eine = 65°, so müßte der andere = 90° — 65° = 25° seyn. Im gleichschenkeligen rechtwinkeligen Dreiecke ist jeder der zwei spitzen Winkel = ½ R = 45°.

5) In jedem gleichseitigen Dreiecke ist jeder der drei Winkel = 60°, da 3 × 60° = 180° = 2R ist.

6) Aus dem Winkel an der Spitze eines gleichschenkeligen Dreiecks kann man jeden an der Grundlinie berechnen. Es sei jener = 74°, so ist 180° — 74° = 106° die Summe der Winkel an der Grundlinie. Da nun beide einander gleich sind, so ist jeder = $\frac{106}{2}$ = 53°. Umgekehrt kann der Winkel an der Spitze berechnet werden, wenn man einen an der Grundlinie in Graden kennt. Es sei dieser = 40°, so ist 180° — 2 × 40° = 180° — 80° = 100° jener an der Spitze.

e) Man sieht hieraus, daß die Größe eines Gradbogens keine bestimmte und unveränderliche ist, da der $\frac{1}{360}$ Theil des größern Kreises größer als eben dieser Theil des kleinern Kreises seyn muß. Indessen hat jeder Grad zur ganzen Peripherie, sei sie noch so groß oder noch so klein, immer das nämliche Verhältniß. Daher sagt man, der Winkel FCG (Fig. 366) werde sowohl durch den Bogen AB, als auch durch den Bogen DE gemessen, da sich hier der Bogen AB so zur Peripherie des Kreises mit CA verhält, wie der Bogen DE zur Peripherie des Kreises mit CD.

f) Noch fügen wir hier zwei Fälle über das Maß jener Winkel bei, deren Scheitel sich entweder ausserhalb oder innerhalb der Kreisebene befindet. Ist (Fig. 367) jener Winkel BAE, so ziehe man durch C die CD mit AB gleichlaufend, so ist nun ∡ DCE = ∡ BAE; allein ½ Bog. DE ist das Maß von ∡ DCE; folglich auch jenes von ∡ BAE. Es ist aber ½ Bog. DE = ½ Bog. BE — ½ Bog. BD = ½ Bog. BE

$= \frac{1}{2}$ Bog. MC. Daß Bog. BD = Bog. MC erkennt man sogleich daraus, daß, nach einer gezognen Querlinie MD nun ∠ BMD = ∠ MDC ist.

Bei dem ∠ GFH verlängere man GF nach K, HF nach L und ziehe durch L die LJ mit KG parallel. Hier ist ∠ JLH = ∠ GFH, folglich $\frac{1}{2}$ Bog. JH das Maß von ∠ GFH. Es ist aber $\frac{1}{2}$ Bog. JH = $\frac{1}{2}$ Bog. JG + $\frac{1}{2}$ Bog. GH = $\frac{1}{2}$ Bog. LK + $\frac{1}{2}$ Bog. GH.

Anmerkungen
zum
eilften Buche des Euclides.

CLXXXIX. **Zur 1. Erklärung.** Wenn Euclides hier sagt: Ein Körper ist, was Länge, Breite und Tiefe hat, so muß noch beigefügt werden: und rings umher in Grenzen eingeschlossen ist; denn ohne dieses wäre der geometrische Körper von dem unendlichen Körperraume nicht verschieden.

CLXXXX. **Zur 2. Erklärung.** Ueber diese und die vorhergehende Erklärung sehe man dasjenige, was bereits oben (I, a—d) bemerkt worden ist.

CLXXXXI. **Zur 3. Erklärung.** Diese Erklärung ist eine bloße Worterklärung und erst durch die wissenschaftlichen Sätze der Körperlehre oder Stereometrie zu begründen. Eine gerade Linie steht schief auf einer Ebene, wenn sie nicht mit allen in dieser Ebene durch ihren Fußpunct gezogenen geraden Linien rechte Winkel bildet.

CLXXXXII. **Zur 4. Erklärung.** Diese Erklärung setzt voraus, daß der Durchschnitt zweier Ebenen eine gerade Linie ist. Ausserdem ist sie ebenfalls nur eine Worterklärung. Man kann auch so sagen: Eine Ebene steht senkrecht auf einer andern, wenn die beiden Linien, welche aus einem willkührlichen Puncte ihres Durchschnitts in jeder Ebene auf diesen Durchschnitt senkrecht gezogen werden, einen rechten Winkel bilden.

CLXXXXIII. Zur 5. Erklärung. Wenn eine gerade Linie auf einer Ebene schief steht, so nehme man in ihr einen beliebigen Punct, denke sich aus ihm auf diese Ebene ein Loth und von dem Puncte, wo es in ihr eintrifft, eine gerade Linie zum Fußpuncte der schiefen Linie, so ist der hierdurch entstehende spitze Winkel der Neigungswinkel der schiefen Linie gegen die Ebene, worauf sie steht. Diese Erklärung setzt die Construction des Lothes voraus und ist demnach hier ebenfalls nur eine Worterklärung.

CLXXXXIV. Zur 6. Erklärung. Sobald man den Durchschnitt zweier Ebenen als eine gerade Linie erkennt, so ist diese Erklärung hier schon als Sacherklärung zu betrachten, da es nur darauf ankömmt, zwei Lothe in einer Ebene zu errichten.

Wenn man den Begriff des Neigungswinkels zum Grunde legt, so lassen sich diese Erklärungen auch so geben:

Eine gerade Linie steht auf einer Ebene oder eine Ebene auf einer Ebene lothrecht oder schief, wenn der Neigungswinkel jener Linie mit der Ebene oder der beiden Ebenen ein rechter oder ein schiefer ist.

CLXXXXV. Zur 7. Erklärung. Daß in dieser Erklärung die Neigungen zweier Ebenen gegen einander ähnlich genennt werden, welche eigentlich vollkommen gleich sind, kann nicht gebilligt werden, da das Wort ähnlich hierbei nicht in dem hergebrachten Sinne genommen ist.

CLXXXXVI. Zur 8. Erklärung. Dieser Erklärung muß beigefügt werden, daß Parallel-Ebenen jene sind, welche nicht zusammentreffen, wenn sie gleich beide nach allen Seiten hin verlängert werden. Sie ist übrigens ebenfalls nur eine Worterklärung, wie es früher jene der Parallellinien gewesen ist.

CLXXXXVII. Zur 9. Erklärung. Diese Erklärung der ähnlichen Körper ist nicht befriedigend, indem es Körper gibt, welche durch gleichviele, ähnliche Seitenflächen begrenzt werden, ohne einander ähnlich zu seyn; z. B. symmetrische Körper von ungleicher Größe des Inhaltes, welche weiter

unten näher betrachtet werden. Körper heissen ähnlich, wenn sie gleichviele sich deckende Körperwinkel, ähnliche homologe Seitenflächen, proportionale homologe Seitenkanten haben und je zwei sich schneidende homologe Seitenflächen denselbigen Neigungswinkel miteinander bilden. Solche Körper sind daher in Allem übereinstimmend und nur in der Größe verschieden. Diese Erklärung ist allerdings nur eine Worterklärung, welche erst durch die folgenden Sätze begründet werden kann. Als Erläuterung dieses Begriffs kann man sich zwei Würfel von verschiedener Größe denken, oder zwei Kugeln von verschiedenen Durchmesser, welche als ähnliche Körper erscheinen. — Unter Seitenkanten der Körper versteht man jene gerade Linien, in welchen sich je zwei ebene Seitenflächen einander durchschneiden. Was der Körperwinkel ist, wird nun sogleich näher erklärt werden.

CLXXXXVIII. Zur 10. Erklärung a) Körper heissen schlechthin gleich, wenn sie denselbigen Körperraum einschließen und verschiedene Gestalten haben. So kann z. B. eine dreieckige Pyramide mit einer viereckigen, ein Würfel mit einer Kugel u. s. f. den nämlichen körperlichen Raum einschließen, wo denn diese Körper einander gleich sind. Die Bedingungen, unter welchen die Körper gleiche Inhalte haben, müssen in den folgenden Sätzen erst entwickelt werden. Daher ist diese Erklärung ebenfalls eine bloße Erklärung des Wortes zu nennen.

b) Wenn die Aehnlichkeit sich mit der Gleichheit vereinigt, so entsteht die Congruenz der Körper, welche somit aus der Uebereinstimmung in Größe und in Gestalt hervorgeht. Die Erklärung des Euclides, nach welcher gleiche und ähnliche Körper solche sind, welche von gleich vielen ähnlichen und gleichen Ebenen begrenzt werden, ist nicht bestimmt genug, da die weiter unten vorkommenden symmetrischen Körper diese Merkmale haben, ohne vollkommen einerlei zu seyn.

c) Congruente Körper können so in einander gestellt werden, daß sie nur einen einzigen bilden und man kann nun von ihnen sagen, daß sie sich decken. Zur Erläuterung denke man z. B. zwei Kugeln von gleichem Durchmesser, welche, wenn sie

mit ihren Mittelpuncten in einander fallen, nun auch mit ihren äussern Grenzen in einander liegen und nur eine einzige Kugel bilden.

d) Die Begriffe von der Gleichheit, Aehnlichkeit und Congruenz, welche in den frühern Büchern der Elemente in Bezug auf ebene Figuren betrachtet worden sind, müssen nun eben so, durch die folgenden Sätze, auf Körper angewendet werden.

CLXXXXIX. Zur 11. Erklärung. a) Die Natur des körperlichen Winkels erkennt man am deutlichsten aus seiner Entstehung. Man nehme oberhalb der Ebene eines willkührlichen Dreiecks einen Punct und ziehe von ihm nach jedem Scheitelpuncte dieses Dreiecks eine gerade Linie, so entsteht an dem Puncte ausserhalb des Dreiecks ein Körperwinkel und zwar hier ein dreikantiger. Seine drei Seitenkanten sind die drei geraden Linien, welche von dem bemerkten Puncte, seinem Scheitelpuncte, ausgehen und seine Seitenflächen jene drei ebene Winkel, welche von je zweien dieser Seitenkanten gebildet werden. Man sieht hieraus, daß dieser Körperwinkel einen körperlichen Raum, jedoch nur nach einer Seite hin, begrenzt; so wie auch, daß die Größe desselben nicht verändert wird, wenn man gleich seine Seitenkanten größer oder kleiner macht. Betrachtet man den Körperwinkel von Aussen, so wird er auch eine Ecke genannt.

b) Nimmt man oberhalb der Ebene eines willkührlichen Vierecks einen beliebigen Punct, aus welchem nach jedem Scheitelpuncte des Vierecks eine gerade Linie gezogen wird, so entsteht an jenem Puncte ein vierkantiger Körperwinkel, an welchem der Scheitel, die vier Kanten und die vier Seitenflächen leicht zu erkennen sind.

c) Wird auf ähnliche Art ausserhalb der Ebene eines 5Ecks, 6Ecks, 7Ecks .... nEcks ein Punct genommen und wie vorhin verfahren, so sieht man, wie hierdurch ein 5, 6, 7 .... nkantiger Körperwinkel entsteht.

CC. Zur 12. Erklärung. a) Auch diese Erklärung der Pyramide ist nicht hinreichend deutlich. — Nimmt man ober-

halb eines gegebenen Dreiecks einen Punct, von welchem nach jedem Scheitel desselben eine gerade Linie gezogen wird, so entsteht ein Körper, welcher von vier Dreiecken eingeschlossen ist und eine dreieckige oder dreiseitige Pyramide heißt. Man erkennt an ihr vier Körperwinkel, sechs Seitenkanten, vier Seitenflächen, deren jede ein Dreieck ist, und den körperlichen Raum, welchen sie einschließet.

b) Denkt man sich ausserhalb der Ebene eines Vierecks einen Punct, von welchem zu jedem Scheitel dieses Vierecks eine gerade Linie gezogen ist, so entsteht hierdurch die vierseitige oder viereckige Pyramide, woran fünf Körperwinkel, acht Seitenkanten, die viereckige Grundfläche und die vier dreieckigen Seitenflächen zu erkennen sind.

c) Auf ähnliche Art läßt sich die Entstehung der fünf, sechs- und mehrseitigen Pyramiden nachweisen. Die Pyramide überhaupt ist daher ein Körper, welcher von einer geradlinigen Figur als Grundfläche und von soviel Dreiecken als Seitenflächen begrenzt ist, als wievielseitig diese Grundfläche ist.

CCI. Zur 13. Erklärung. a) Die Entstehung der verschiedenen Arten prismatischer Körper gehört in die wissenschaftliche Entwickelung; daher ist diese Erklärung des Euclides eine bloße Worterklärung.

b) Je nachdem die Grundfläche des prismatischen Körpers ein Dreieck, Viereck, Fünfeck u. s. f. ist, wird das Prisma ein dreickeiges, viereckiges, fünfeckiges u. s. w. genannt. Stehen seine Seitenkanten lothrecht auf der Grundfläche, so heißt es ein senkrechtes, sonst ein schiefes Prisma. Das dreiseitige Prisma hat sechs Körperwinkel, drei Seitenkanten, drei Seitenflächen, welche Parallelogramme sind; an dem vierseitigen Prisma erkennt man acht Körperwinkel, vier Seitenkanten, vier Seitenflächen, und auf ähnliche Art kann dieses für die mehrseitigen Prismen nachgewiesen werden.

c) Ein viereckiges Prisma, welches in sechs Parallelogramme eingeschlossen ist, wovon zwei gegenüberstehende einander parallel und congruent sind, wird im Besondern ein

Parallelopipedum genannt, welches ebenfalls ein senkrechtes oder ein schiefes seyn kann. Man sieht aber sogleich, daß diese Erklärungen ebenfalls nur Worterklärungen sind.

CCII. Zur 14. Erklärung. a) Die krumme Fläche, welche bei dieser Umdrehung von dem halben Umfange des sich drehenden Kreises beschrieben wird, heißt die Kugelfläche, und der von ihr eingeschlossene Körperraum ist die körperliche Kugel oder der Kugelkörper.

b) Diese Erklärung ist eine Sacherklärung, weil sie die Entstehung der Kugel nachweiset.

c) Denkt man sich irgend einen Kreisabschnitt, welcher um die feste Sehne einmal ganz und gar herumbewegt wird, so entsteht hierdurch ein rundlicher Körper, welcher, gleich der Kugel, von einer krummen Oberfläche eingeschlossen ist.

CCIII. Zur 15. Erklärung. Axe überhaupt heißt jene unbeweglich bleibende Linie, um welche irgend eine geradlinige oder krummlinige Figur einmal ganz und gar herumgedreht wird; wie z. B. vorhin (CCII, c.) die Sehne des Abschnitts.

CCIV. Zur 16. Erklärung. a) Dieser Mittelpunct muß von jedem Puncte in der Oberfläche der Kugel gleiche Entfernung haben, weil er von jedem Puncte der Peripherie des erzeugenden Halbkreises gleichweit absteht.

b) Jede solche vom Mittelpuncte zur Oberfläche der Kugel gehende Linie wird Halbmesser oder Radius der Kugel genennt, und es ist klar, daß in derselbigen Kugel alle Halbmesser einander gleich sind.

CCV. Zur 17. Erklärung. a) Hieraus folgt nun auch, daß in einer Kugel alle Durchmesser einander gleich sind, weil jeder Durchmesser aus zwei gleichen Halbmessern besteht.

b) Denkt man sich zwei concentrische Kreise um ihre, in eine gerade Linie fallende Durchmesser gedreht, so entstehen hierdurch concentrische Kugeln.

CCVI. Zur 18. Erklärung. a) Dieser Kegel, welcher aus Umdrehung eines rechtwinkeligen Dreiecks um eine seiner Catheten entsteht, heißt der senkrechte oder lothrechte,

weil diese unbewegliche Cathete, welche die Axe des Kegels genennt wird, auf der Kreisebene, welche die andere Cathete beschreibt, und des Kegels Grundfläche bildet, senkrecht steht. Die Hypotenuse des den Kegel erzeugenden Dreiecks heißt die Seite des Kegels, und es ist hieraus klar, daß der senkrechte Kegel auch ein gleichseitiger ist.

b) Wenn man sich durch die Spitze des senkrechten Kegels und durch zwei willkührliche Endpuncte des Durchmessers seiner Grundfläche eine Ebene denkt, was geschehen kann, da jede drei, nicht in gerader Linie liegende Puncte in einer Dreiecksebene liegen, so heißt dieses Dreieck das Axendreieck und ist immer dem doppelten, den Kegel erzeugenden Dreiecke gleich. Wenn nun der an der Spitze des Kegels befindliche Winkel dieses Dreiecks ein rechter, stumpfer oder spitzer ist, so haben die Alten (aus Gründen, welche in die Lehre von den Kegelschnitten gehören) den Kegel einen rechtwinkeligen, stumpf- oder spitzwinkeligen genennt.

c) Allein es gibt auch einen schiefen Kegel, dessen Entstehung folgende ist. Man denke aus dem Mittelpuncte eines gegebenen Kreises eine willkührliche gerade Linie schief auf seiner Ebene aufgestellt, nehme in ihr einen beliebigen Punct, ziehe durch ihn nach dem Umfange eine willkührliche gerade Linie und führe dieselbe, mit ihrem oberen Endpuncte fest und die Peripherie stets berührend, einmal rings um sie her, so beschreibt dieselbe die krumme Seitenfläche eines schiefen Kegels, dessen Grundfläche der gegebene Kreis ist. Daß dieser schiefe Kegel ein ungleichseitiger ist, erkennt man ebenfalls leicht hieraus.

d) Ein Kegel überhaupt ist also ein Körper, welcher von einem Kreise als Grundfläche und von einer krummen, in sich selbst zurücklaufenden, in einen Punct sich endigenden krummen Seitenfläche eingeschlossen wird.

CCVII. Zur 19. Erklärung. Da Euclides nur den senkrechten Kegel erklärt hat, so ist auch diese Erklärung der Axe nicht allgemein genug, da sie sich nur auf diesen Kegel bezieht. Die Axe des Kegels überhaupt ist eine gerade Linie von seiner Spitze bis zum Mittelpuncte seiner Grundfläche.

Steht sie auf letzterer lothrecht oder schief, so wird der Kegel selbst ein lothrechter oder ein schiefer genennt.

CCVIII. Zur 20. Erklärung. Auch diese Erklärung bezieht sich nur auf den senkrechten Kegel, und nicht auf den Kegel überhaupt. Im Allgemeinen ist die Grundfläche des Kegels jener Kreis, welcher mit seiner krummen Seitenfläche den ganzen Körper begrenzet.

CCIX. Zur 21. Erklärung. a) Euclides erklärt hier nur den senkrechten oder lothrechten Cylinder, denn nur dieser entsteht durch Umdrehung eines Rechtecks um eine seiner Seiten als unbewegliche Axenlinie. Die, dieser unbeweglichen Seite gegenüberliegende beschreibt eine einfach gekrümmte, in sich selbst zurücklaufende Fläche, welche die Seitenfläche des Cylinders genennt wird.

b) Ausser dem senkrechten Cylinder gibt es auch einen schiefen, dessen Entstehung auf folgende Weise anschaulich wird. Man denke aus dem Mittelpuncte eines gegebenen Kreises eine schiefstehende Linie auf seiner Ebene aufgestellt und nehme an, es bewege sich dieser Kreis, in stets parallel bleibender Richtung, mit seinem Mittelpuncte in dieser Linie aufwärts, so beschreibt die Peripherie dieses Kreises eine krumme Fläche, welche mit den beiden Kreisflächen den schiefen Cylinder bildet. Man sieht sogleich, daß derselbe nicht durch Umdrehung irgend einer Figur um eine feststehende Axenlinie entstehen kann.

CCX. Zur 22. Erklärung. a) Diese Erklärung ist nicht allgemein genug, da sie sich nur auf den senkrechten Cylinder und nicht auf den Cylinder überhaupt bezieht.

b) Unter der Axe eines Cylinders versteht man überhaupt jene gerade Linie, welche den Mittelpunct seiner Grundfläche mit jenem seiner Oberfläche verbindet. Steht sie auf der Grundfläche lothrecht, so ist der Cylinder ein senkrechter; steht sie schief, so heißt er ein schiefer Cylinder.

CCXI. Zur 23. Erklärung. Diese Erklärung der Grundflächen des Cylinders bezieht sich lediglich auf den senkrechten Cylinder. Im Allgemeinen sind die Grundflächen

des Cylinders jene zwei Kreise, welche einander parallel und gleich sind, und mit der krummen Seitenfläche die Grenzen des Körpers bilden.

CCXII. Zur 24. Erklärung. Nach dieser Erklärung ist es nicht schwer, in Bezug auf die bisher entwickelte Entstehung der Kegel und Cylinder, solche Körper zu construiren, welche einander ähnlich sind.

CCXIII. Zur 25. Erklärung. a) Diese Erklärung des Würfels ist bloße Worterklärung, weil die Entstehung dieses Körpers hierdurch noch nicht nachgewiesen ist.

b) Der Würfel zeigt der Anschauung acht congruente Körperwinkel, deren jeder von drei ebenen Winkeln gebildet wird und zwölf unter sich gleiche Seitenkanten.

c) Auch ist derselbe als eine besondere Gattung des Parallelopipedums zu betrachten.

d) Man bemerke noch hier, daß jene eckige prismatische Körper, deren Seitenkanten auf den Grundflächen lothrecht stehen, senkrechte; alle übrigen aber, bei welchen dieses der Fall nicht ist, schiefe Prismen genennt werden.

CCXIV. Zur 26. Erklärung. Zur anschaulichen Entstehung dieses Körpers dient folgende Erörterung. Man halbire die drei Seiten eines gegebenen gleichseitigen Dreiecks und ziehe durch je zwei dieser Theilpuncte drei gerade Verbindungslinien, so entstehen vier congruente gleichseitige Dreiecke, wovon drei um das mittlere herumliegen. Denkt man sich nun jedes dieser drei äussern Dreiecke um die Seite des mittlern solange nach Oben gedreht, bis ihre drei Spitzen sich in einem Puncte vereinigen, so entsteht hierdurch das Tetraëder. Man erkennt sogleich an diesem Körper vier congruente Körperwinkel, sechs gleiche Seitenkanten und gleiche Neigungen derselben gegen die Ebenen, worauf sie stehen. Dieser Körper heißt regelmäßig, weil er von congruenten Seitenflächen so eingeschlossen ist, daß sich alle Körperwinkel und Seitenkanten einander decken.

CCXV. Zur 27. Erklärung. Wenn man über jede Seite eines gegebenen Quadrates ein gleichseitiges Dreieck nach

Aussen beschreibt und nun annimmt, es drehe sich jedes derselben um die am Quadrate liegende Seite, bis ihre Spitzen sich in einem Puncte vereinigen, so entsteht hierdurch eine senkrechte vierseitige Pyramide. Denkt man sich dieselbe nun noch einmal und mit ihren quadratischen Grundflächen so zusammengefügt, daß diese sich decken, so entsteht das Octaëder, als ein ebenfalls regelmäßiger Körper, woran man sechs gleiche Körperwinkel, acht congruente gleichseitige Dreiecke und zwölf gleiche Seitenkanten erkennt.

CCXVI. Zur 28. Erklärung. Das Dodecaëder wird am Faßlichsten durch Anschauung eines Modelles erkannt, an welchem man zwölf congruente regelmäßige Fünfecke, zwanzig gleiche Körperwinkel und dreißig gleiche Kanten erblickt.

Seine wissenschaftliche Entstehung setzt die Lehren der Stereometrie voraus.

CCXVII. Zur 29. Erklärung. Auch das Icosaëder wird am Bequemsten durch Anschauung eines Modelles deutlich. Es zeigt hier zwanzig congruente gleichseitige Dreiecke, zwölf gleiche Körperwinkel und dreißig gleiche Seitenkanten. Seine Entstehung gehört ebenfalls der Wissenschaft an.

CCXVIII. Zum 1. Satze. Die Richtigkeit dieses Satzes folgt daraus, daß eine Ebene jene Fläche ist, welche man sich nach allen Seiten, der Länge und Breite nach, als eine gerade denkt, wie bereits Oben (IV) bemerkt worden ist.

CCXIX. Zum 2. Satze. Auch dieser Satz ist höchst einfach und läßt sich, gleich dem vorigen, als Grundsatz aufstellen.

CCXX. Zum 3. Satze. Da jede Ebene durchaus gerade ist, so muß auch der Durchschnitt zweier Ebenen eine gerade Linie seyn. Wäre er krumm, so müßte es auch eine der Ebenen selbst seyn.

CCXXI. Zum 4. Satze. a) Die Hypothesis dieses Satzes ist eigentlich die Annahme, daß $\measuredangle FEB = \measuredangle FED = R$ sei. Denn wenn dieses ist, so muß auch $\measuredangle FEA = \measuredangle FEC = R$ seyn, weil jeder dieser Winkel ein Nebenwinkel des vorigen ist.

b) Aber nun kann man fragen: Wie wird denn diese Hypothesis construirt, d. h. wie kann man eine gerade EF

aus dem Scheitel E eines gegebenen Winkels DEB so errichten, daß $\measuredangle FEB = \measuredangle FED = R$ ist?

c) Wenn dieser Winkel DEB nicht eine bestimmte Größe haben soll, so lege man durch FE eine willkührliche Ebene FED und errichte in ihr aus E auf FE ein Loth ED. Dann lege man durch FE eine Ebene FEH nach anderer Richtung und errichte in ihr auf FE aus E das Loth EH, so steht FE auf jedem Schenkel eines Winkels DEH senkrecht und der Satz beweiset, daß FE nun auch auf der, rings umher verlängerten Winkelebene DEH lothrecht stehe.

d) Hier bemerke man noch folgenden Beweis dieses Satzes. Wenn $\measuredangle FEA = \measuredangle FED = R$ ist, so ziehe man AD und durch E die willkührliche EG, wo denn auch $\measuredangle FEG = R$ seyn soll.

Man denke, es sei FE unterhalb der Ebene AED verlängert bis $EF' = EF$ ist, und es seien nun die geraden F'A, F'G und F'D gezogen. Hier ist nun $\triangle FEA \cong \triangle F'EA$, folglich $FA = F'A$. Auf gleiche Art ist auch $\triangle FED \cong \triangle F'ED$ und $FD = F'D$. Daher muß auch $\triangle FAD \cong \triangle F'AD$ und somit $\measuredangle FDG = \measuredangle F'DG$ seyn. Hieraus folgt nun auch, daß $\triangle FDG \cong \triangle F'DG$ und folglich $FG = F'G$ ist. Es haben daher die Dreiecke FEG und F'EG die drei Seiten, einzeln genommen, gemein und es ist $\triangle FEG \cong \triangle F'EG$; folglich $\measuredangle FEG = \measuredangle F'EG = R$.

e) Diesen Beweis theilt Prof. Ideler in seiner neuen, den Anfängern nützlichen, mit Anmerkungen versehenen Uebersetzung der Elementar-Geometrie von Lacroix S. 150 mit, welcher ihn von Cauchy, einem jungen ausgezeichneten Geometer, erhalten hatte. Er ist allerdings sinnreich; setzt aber voraus, daß die willkührliche Linie EG zwischen die Schenkel des Winkels AED fällt. Fiele sie ausserhalb dieses Winkels, wie z. B. EH, so müßte sie rückwärts über E verlängert werden, wo denn für EG der vorige Beweis statt findet. Ist aber nun $\measuredangle FEG = R$, so muß auch $\measuredangle FEH = R$ seyn. Sollte die über E verlängerte HE nach A oder D gehen, so wäre ohnedies, da $\measuredangle FEA = \measuredangle FED = R$, nun auch $\measuredangle FEB = \measuredangle FEC = R$.

Fiele endlich die willkührliche Linie EG in die Winkelebene AEC oder DEB, so hat wieder derselbige Beweis Statt.

CCXXII. Zum 5. Satze. a) Die Hypothesis dieses Satzes, welcher der umgekehrte des Vorigen ist, kann, wie zuvor, leicht construirt werden.

b) Von diesem Satze theilen wir folgenden neuen indirecten Beweis mit. Wenn aus dem Endpuncte einer geraden Linie a zwei Lothe b und c auf sie errichtet sind, welche irgend einen Winkel miteinander bilden, und ein drittes, aus demselbigen Puncte von a auf sie errichtetes Loth nicht in die Ebene der Linien b und c fiele, so verlängere man die Linie a jenseits dieser Ebene willkührlich. Da nun auf einer Seite dieser Ebene, in Bezug auf die Linie a und auf die Lothe b und c, Alles gerade so, wie auf der andern ist, so folgte daraus, daß das dritte Loth auf der einen Seite dieser Ebene läge, auch ebenso, daß es auf der andern Seite läge. Allein aus dem nämlichen Puncte von a sind zwei in einerlei Ebene mit a liegenden Lothe auf sie unmöglich. Folglich fällt das dritte Loth in die Ebene, worin b und c liegen.

c) Nun kann durch Hülfe dieses Satzes auch der Lehrsatz in 4. eigenthümlich bewiesen werden. Wenn zwei gerade Linien a und b einander schneiden und die gerade c in ihrem Durchschnittspuncte sowohl mit a als mit b einen rechten Winkel bildet, und es sollte irgend eine dritte aus dem gemeinschaftlichen Durchschnittspuncte in der Ebene von a und b willkührlich gezogne d mit c keinen rechten Winkel bilden, so lege man durch c und d eine Ebene, welche die Ebene von a und b in einer geraden Linie e schneiden muß. Hier ist nun der Winkel, welchen c mit d bildet, entweder spitz oder stumpf. Es sei dieses oder jenes, so muß (nach b) ein aus dem gemeinschaftlichen Durchschnittspuncte auf c in der Ebene von c, d und e gezognes Loth f in die Ebene von a und b fallen. Es befänden sich also die zwei Linien, d und f, in einerlei Ebene, was widersprechend ist, da von einem Puncte in einer Ebene nur eine gerade Linie nach einerlei Richtung möglich ist.

CCXXIII. Zum 6. Satze. Die Hypothesis dieses Satzes ist das Daseyn zweier geraden Linien, von welchen jede auf derselbigen Ebene lothrecht steht. Solche Linien können dadurch construirt werden, daß man für die Linie AB sowohl ∠ ABD als ∠ ABE, dann für CD sowohl ∠ CDB als ∠ CDE = R macht, und nunmehr diese Linien mit ihren Winkelebenen DBE und BDE in dieselbige dritte Ebene stellt, auf welcher nun sowohl AB als CD lothrecht seyn muß.

CCXXIV. Zum 7. Satze. Da nach der 35. Erklärung des I. Buches jene gerade Linien parallele heissen, welche in einerlei Ebene liegen und bei jeder Verlängerung zu beiden Seiten niemals zusammenlaufen, so ist klar, daß die Linien AB und CD, welche als gleichlaufend angenommen sind, auch in einerlei Ebene liegen. Wenn aber dieses der Fall ist, so erhellet leicht, daß auch die Verbindungslinie EF sich in derselbigen Ebene befinden müsse.

CCXXV. Zum 8. Satze. Um die Hypothesis dieses Lehrsatzes zu construiren, errichte man BA (nach CCXXIII.) auf die Ebene DBE lothrecht, lege durch AB eine beliebige Ebene ABD und ziehe in dieser Ebene eine gerade Linie DC; so, daß ∠ CDB = R ist, so muß DC mit BA parallel seyn.

CCXXVI. Zum 9. Satze. Auch die Hypothesis dieses Satzes muß erst construirt werden, weil man sonst nicht erkennt, wie dieselbe möglich ist. Wenn man auf FG in G sowohl die GH als die GJ lothrecht stellt und nun in der Ebene FGH den ∠ GHB = R und in der Ebene FGJ den ∠ GJD = R macht, so ist HB mit GF und JD auch mit GF gleichlaufend.

CCXXVII. Zum 10. Satze. Um die Linien ED und EF, der Hypothesis entsprechend, zu construiren, lege man durch die Puncte A, B und E eine Ebene und ziehe in ihr die ED mit BA parallel. Auf gleiche Art lege man durch C, B und E eine Ebene, in welcher EF mit BC gleichlaufend wird.

CCXXVIII. Zum 11. Satze. a) Von dem gegebenen Puncte A kann nur ein Loth AF auf die Ebene HGBC gezogen werden. Denn wenn es, ausser AF noch ein anderes Loth AM gäbe, so müßte, wenn MF gezogen wird, nun

$\measuredangle$ AMF = R seyn, da aber auch $\measuredangle$ AFM = R ist, so wäre in dem Dreiecke AMF der $\measuredangle$ AMF + $\measuredangle$ AFM = 2R, was unmöglich ist.

b) Auch ist das von A auf die Ebene HGBC gezogene Loth die kürzeste Linie, welche von jenem Puncte zur Ebene möglich ist. Denn jede andere, wie z. B. AD, muß, als Hypotenuse des rechtwinkeligen Dreiecks AFD, größer als AF seyn.

c) Ferner läßt sich leicht beweisen, daß die schiefere Linie die größere und umgekehrt auch die größere die schiefere ist.

CCXXIX. Zum 12. Satze. Da hier die Puncte B, C und A in einerlei Ebene liegen, so kann in dieser Ebene durch A leicht die AD mit CB parallel gelegt werden.

CCXXX. Zum 13. Satze. Man sieht, daß diese beiden Sätze (12. u. 13.) jenen ähnlich sind, welche bereits früher in der ebenen Geometrie (I. Buch, 11. u. 12. S.) betrachtet wurden.

CCXXXI. Zum 14. Satze. a) Die Hypothesis dieses Satzes ist leicht zu construiren, da man durch AB eine beliebige Ebene legen und in ihr sowohl durch A als durch B auf AB ein Loth errichten und dieses für eine zweite durch AB gelegte Ebene auf ähnliche Weise wiederholen kann. Die Ebenen der bei A und B entstehenden Winkel sind nun von solcher Lage, daß AB auf jeder derselben lothrecht steht.

b) Soll also mit einer gegebenen Ebene eine andere gleichlaufende construirt werden, so errichte man auf sie ein beliebiges Loth, ziehe durch seinen Fußpunct in der Ebene zwei gerade, unter sich einen Winkel bildende Linien und durch einen willkührlichen Punct in dem Lothe mit jeder dieser beiden Linien eine parallele, so ist die Ebene dieses Winkels, welche erweitert werden kann, mit der gegebenen Ebene gleichlaufend.

c) Wenn ausserhalb einer Ebene ein Punct gegeben ist, so gibt es durch diesen nur eine Ebene, welche mit jener gleichlaufend ist. Man ziehe durch diesen Punct ein Loth auf die gegebene Ebene, so müßte, wenn man durch dieses Loth eine Ebene legte und es durch den gegebenen Punct noch eine zweite Parallel-Ebene gäbe, hier die Summe der beiden innern

Winkel kleiner als zwei Rechte seyn. Daher müßten sich beide Ebenen einmal schneiden und könnten nicht parallel seyn.

d) Daher muß eine gerade Linie, welche auf einer von zwei parallelen Ebenen lothrecht steht, auch lothrecht auf der andern seyn. Wäre dieses nicht, so würde eine Durchschnittsebene längs dieser Linie zwei innere Winkel bilden, welche $< 2R$ wären und beide Ebenen müßten, gehörig verlängert, sich einmal durchschneiden.

CCXXXII. Zum 15. Satze. a) Um diese, die Hypothesis des Satzes bildenden parallelen Linien zu construiren, bemerke man dieses. Aus dem Scheitel eines willkührlichen Winkels erhebe sich über dessen Ebene eine auf ihr schiefstehende Linie, so bildet sie mit jedem Schenkel des gegebenen Winkels eine Ebene, und man kann aus einem beliebigen Puncte jener Linie in jeder dieser Ebenen eine mit der untern gleichlaufende ziehen.

b) Wenn das von B auf die Ebene DEF gezogene Loth gerade in den Scheitelpunct E fiele, so wäre der Beweis des Satzes noch einfacher.

CCXXXIII. Zum 16. Satze. Allein nicht umgekehrt: Wenn die Durchschnittslinien EF und GH parallel sind, so müssen es auch die Ebenen AB und CD seyn. Denn nichtparallele Ebenen können gleichlaufende Durchschnittslinien haben.

CCXXXIV. Zum 17. Satze. a) Es wird hier vorausgesetzt, daß die beiden geraden Linien AB und CD ganz und gar ausser einander liegen, und keinen Punct mit einander gemein haben. Auch muß man sich dieselben über A und B, so wie auch über C und D verlängert vorstellen.

b) Wenn zwei aus einem Puncte A ausgehende Linien AB und AD von zwei Parallel-Ebenen JK und LM geschnitten werden, so ist ebenfalls $AE : EB = AN : ND$.

CCXXXV. Zum 18. Satze. Oder auch so. Man ziehe durch B auf CB in der untern Ebene die Linie BM lothrecht, so ist $\measuredangle ABM = R$. Allein dieser Winkel ABM ist der Neigungswinkel der Ebene DE gegen die untere Ebene; folglich ist jene auf dieser lothrecht.

CCXXXVI. Zum 19. Satze. Der Beweis dieses Satzes kann auch auf folgende Art geführt werden. Wenn die Ebene ABH auf der untern VW lothrecht steht, so nehme man in der Durchschnittslinie AH einen willkührlichen Punct D, und ziehe sowohl DC als DB auf AH senkrecht, so ist ∠BDC, als Neigungswinkel, = R. Denkt man sich nun durch MDC eine Ebene CL, so ist klar, daß diese nur dann auf VW lothrecht seyn kann, wenn sie in die Linie DB fällt, weil nur dann ihr Neigungswinkel BDH = R ist.

CCXXXVII. Zum 20. Satze. Daher können drei gegebene ebene Winkel nur dann einen dreikantigen Körperwinkel bilden, wenn je zwei zusammen größer als der dritte sind, welches dann Statt finden muß, wenn die Summe der zwei kleinsten größer als der größte ist. Ein ähnliches Verhältniß hat bekanntlich auch bei drei geraden Linien Statt, woraus ein Dreieck gebildet werden soll.

CCXXXVIII. Zum 21. Satze. Man erkennt dieses auch sogleich durch die Anschauung. Es seien (Fig. 368.) die drei Winkel ACD, DCB und BCA zusammen = 4R, so ist klar, daß sie zusammen in eine Ebene fallen, über welche sich der Punct C nur dann erheben kann, wenn einer von ihnen zum wenigsten kleiner wird, als er gegeben ist. Eben dieses gilt von mehreren um C herum liegenden Winkeln.

CCXXXIX. Zum 22. Satze. Wir geben von diesem Satze noch folgenden Beweis. Es seien (Fig. 369) ACB, BCD und DCE die drei gegebenen Winkel, wovon die zwei kleinsten, nämlich ACB und BCD zusammen größer als der dritte DCE ist, so lege man sie mit ihren gemeinschaftlichen Schenkeln so an ihrem Scheitel C zusammen, wie es die Figur zeigt, und beschreibe mit CA aus C den Kreisbogen ABDE. Zieht man nun die Sehnen AB, BD, DE und AD, so ist, weil Bog. ABD > Bog. DE, auch Sehne AD > Sehne DE. Da aber Sehne AB + Sehne BD > Sehne AD ist, so muß auch Sehne AB + Sehne BD > Sehne DE seyn. Folglich kann mit den Seiten AB, BD und DE ein Dreieck beschrieben werden.

CCXXXX. Zum 23. Satze. Wenn (Fig. 369) ACB, BCD und DCE die drei gegebenen Winkel sind, woraus der Körperwinkel am Scheitelpuncte C gebildet werden soll, so denke man sich den Winkel ECD um die unbewegliche Linie CD als Axe so gedreht, daß der Punct E sich über die Ebene ECA erhebt. Hier erkennt man leicht, daß der Winkel, welchen diese CE, bei fortgesetzter Bewegung, mit CB bildet, immer kleiner werden muß, bis CE wieder in die Ebene DCA fällt, in welchem Fall er am kleinsten ist; aber, nach der Annahme doch stets größer als ∢ BCA seyn muß. Daher wird die sich drehende CE einmal mit CB einen Winkel bilden, welcher = ∢ ACB ist, und in dieser Lage entsteht nun bei C der aus den drei Winkeln ACB, BCD und DCE gebildete Körperwinkel.

CCXXXXI. Zum 24. Satze. a) Der Ausdruck dieses Satzes ist irrig, da es vierkantige, von Parallelebenen begrenzte Körper gibt, deren zwei einander gegenüberliegende keine Parallelogramme, sondern Paralleltrapeze sind. Bei mehrseitigen Prismen von regelmäßiger Grundfläche und gerader Seitenzahl sind z. B. die gegenüberliegenden Seitenflächen congruente und gleichlaufende Parallelogramme; allein weder die Grundfläche noch die Oberfläche ist ein solches Parallelogramm.

b) Es wäre an dieser Stelle sehr zweckmäßig gewesen, wenn Euclides die Entstehung der verschiedenen eckigen prismatischen Körper nachgewiesen hätte, wozu die bisherigen Vordersätze vollkommen hinreichen, wie die hier folgenden Abschnitte zeigen.

c) Das senkrechte dreieckige Prisma zu construiren. Es sei (Fig. 370) das Dreieck DAC die gegebene Grundfläche, so errichte man aus den Scheitelpuncten D, A und C auf dessen Ebene die drei willkührlich großen, aber unter sich gleichen Lothe DM = AP = CN und ziehe die Verbindungslinien MP, PN und NM, so ist MPNDAC ein senkrechtes dreieckiges Prisma.

Da DM, AP und CN Lothe auf der Ebene DAC sind, so sind sie auch paarweise mit einander parallel, und da auch DM = AP = CN ist, so müssen die drei Seitenflächen MPAD,

NPAC und MNCD Rechtecke seyn. Da nun die Dreiecke MPN und DAC die drei Seiten, einzeln genommen, mit einander gemein haben, so sind sie auch einander congruent. Da ferner ∢ DMP = ∢ DMN = R und auch ∢ APM = ∢ APN = R, endlich ∢ CNM = ∢ CNP = R, so sind auch DM, AP und CN auf MPN lothrecht und es muß MPN mit DAC gleichlaufend seyn. Folglich ist der construirte Körper ein senkrechtes dreieckiges Prisma.

d) Ein schiefes dreieckiges Prisma zu construiren. Man errichte aus einem Winkelpuncte (Fig. 371) A des gegebenen Dreiecks APC eine auf dessen Ebene schief stehende Linie AM, ziehe durch P und C die PB und CN mit ihr parallel, mache AD = PG = CF und ziehe die Verbindungslinien DG, GF und FD, so ist DGFAPC ein schiefes dreieckiges Prisma.

Da die drei Linien PG, CF und AD gleichlaufend unter sich sind, und PG = CF = AD ist, so sind auch die drei Seitenebenen DGPA, FGPC und DFCA drei Parallelogramme. Da ferner DG mit AP und DF mit AC gleichlaufend ist, so muß auch ∢ FDG = ∢ CAP und ebenso ∢ DGF = ∢ APC, so wie auch ∢ GFD = ∢ PCA seyn. Ferner ist, wegen DG = AP, GF = PC und DF = AC, auch das Dreieck DGF dem Dreiecke APC congruent und (wie man leicht findet) auch mit ihm parallel. Demnach ist DGFAPC ein schiefes dreieckiges Prisma.

e) Ein senkrechtes Parallelopipedum zu construiren. Wenn (Fig. 372) DACB ein gegebenes Parallelogramm ist, so errichte man aus dem Scheitelpuncte A ein Loth AG auf dessen Ebene, ziehe durch C, B, D die mit ihm gleichlaufenden CV, BW, DO, nehme AP = CQ = BM = DN und ziehe PQ, QM, MN und NP, so ist NC das zu bildende Parallelopipedum.

Da CQ, BM, DN mit dem Lothe AP gleichlaufend sind, so müssen sie es auch unter sich seyn und sämmtlich auf der Grundfläche senkrecht stehen. Auch muß, weil sie alle einerlei Größe haben, jede der Seitenflächen PACQ, QCBM, MBDN und NPAD ein Rechteck seyn. Ferner ist die Oberfläche, wie

man leicht erkennt, der Grundfläche congruent und mit ihr gleichlaufend.

f) Um ein schiefes Parallelopipedum zu construiren, darf man nur aus dem Winkelpuncte D (Fig. 374.) des Parallelogramms DBAC eine auf seiner Ebene schiefstehende Linie DP errichten, durch C, A und B die mit ihr gleichlaufenden CN, AM und BQ ziehen, DG = CJ = AL = BV machen und die geraden Linien GV, VL, LJ und JG ziehen, so ist GA ein schiefes Parallelopipedum, worüber der Beweis, auf ähnliche Art, wie zuvor geführt wird.

g) Wenn ein Quadrat als Grundfläche gegeben ist und man beschreibt darüber ein senkrechtes Parallelopipedum, dessen Seitenkante der Seite dieses Quadrates gleich ist, so entsteht hierdurch der Würfel.

h) Ueberhaupt ist hieraus klar, wie 5, 6, 7 ..... n eckige, sowohl senkrechte als schiefe, Prismen entstehen können.

CCXXXXII. Zum 25. Satze. Da Euclides diesen Satz nach dem ihm eigenthümlichen Begriffe der geometrischen Proportion beweiset, so soll derselbe hier auf die, den Neuern gewöhnliche Art entwickelt werden.

Es sei (Fig. 375.) HB das gegebene Parallelopipedum, welches durch eine Ebene KJLM, parallel mit den Seitenflächen CAEH und DBFG, in zwei Parallelopipeden HJ und MB getheilt ist, so gibt es (nach LXXV) eine Linie HQ, welche als gemeinschaftliches Maß von HM und MG angesehen werden kann. Zieht man nun QP mit HE parallel, so ist das kleine Parallelogramm HQPE auch als gemeinsames Maß der beiden Parallelogramme HMLE und MGFL zu betrachten. Wird nun durch QP eine Ebene mit HEAC gleichlaufend geführt, so ist HN ein kleines Parallelopipedum, welches ebenfalls als gemeinschaftliches Maß von HJ und MB anzusehen ist. Wäre nun HQ in HM gerade 7mal und in MG genau 5mal enthalten, so müßte auch HP in HL und HN in HJ gerade 7mal, und ebenso auch HP in MF und HN in MB wieder 5mal enthalten seyn. Daher ist

HJ : MB = 7 : 5 d. h.

HJ : MB = HL : MF.

CCXXXXIII. Zum 26. Satze. Es sei (Fig. 376.) bei F der gegebene Körperwinkel, welcher von den drei ebenen Winkeln GFH, JFG und JFH gebildet wird und man soll einen ihm ähnlich liegenden und gleichen Körperwinkel an den Punct A der gegebenen Linie construiren.

Man ziehe von J auf die Ebene FGH oder ihre Verlängerung das Loth JK und die geraden KF, KH. Nun mache man ∠ BAC = ∠ GFH, BA = GF, AC = FH und ziehe BC, so ist △ FGH ≅ △ ABC. Macht man nun ∠ CAE = ∠ HFK und ∠ ACE = ∠ FHK, so wird △ AEC ≅ △ FKH. Errichtet man nun in E auf die Ebene ABC das Loth ED, macht ED = KJ und zieht DA, DC, so ist der bei A entstehende Körperwinkel jenem bei F gleich. Denn wenn die dreieckige Pyramide JFGH gehörig in DABC gestellt wird, so ist klar, daß beide nur eine einzige bilden und folglich durchaus congruent sind.

CCXXXXIV. Zum 27. Satze. a) Es wird hierbei vorausgesetzt, daß die gegebene Linie AB die homologe d. h. ähnlich liegende mit der Linie CE sei.

b) Noch einfacher ist die Aufgabe: Ein dreieckiges Prisma zu construiren, welches dem gegebenen (Fig. 377) ABCDEF ähnlich ist und dessen Seite AG der Seite AD homolog seyn soll. Man nehme AD:AG = AC:AK = AB:AL, so sind die Puncte K und L bestimmt. Man ziehe KL, durch L die LH = AG mit AD und durch K die KJ = AG mit AD parallel, und nun die Verbindungslinien GH, GJ, so ist ALKGHJ der zu construirende Körper, wovon leicht bewiesen werden kann, daß er mit dem gegebenen gleiche Körperwinkel, ähnliche Grenzflächen und proportionale Seitenkanten hat.

c) Wäre AG > AD, so kann leicht eine ähnliche Construction ausgeführt werden und das neue Prisma wird größer als das gegebene. Auf gleiche Art können auch mehrseitige Prismen construirt werden, welche den gegebenen ähnlich sind.

CCXXXXV. Zum 28. Satze. a) Hier ist vor Allem zu beweisen, daß sich die Diagonalen CF und DE in einerlei Ebene CFED befinden. Dieses folgt sogleich daraus, weil sowohl CD als FE mit GA gleichlaufend ist, und daher auch CD mit FE parallel seyn muß. Da nun CD und FE in einerlei Ebene liegen, so müssen sich auch CF und DE in derselbigen Ebene befinden. Es ist also ausser Zweifel, daß das Parallelopipedum AB durch diesen Diagonalschnitt in zwei dreieckige Prismen getheilt wird.

b) Wenn dieses Parallelopipedum ein senkrechtes ist (wie das in den Elementen verzeichnete), so kann leicht gezeigt werden, daß die zwei, aus dieser Theilung entstehenden Prismen einander vollkommen congruent sind, d. h. daß sie so können in einander gestellt werden, daß sie nur ein einziges bilden. In diesem Falle ist der Satz vollkommen bewiesen.

c) Der Beweis des Euclides beruht vorzüglich auf der 10. Erklärung dieses eilften Buches, nach welcher «gleiche «und ähnliche Körper jene sind, welche von gleich vielen, «gleichen und ähnlichen Ebenen eingeschlossen werden.» Allein diese Erklärung enthält eigentlich eine Behauptung, welche bewiesen werden muß, und selbst diese Behauptung ist nicht allgemein richtig.

d) Es sei (Fig. 378) AB ein schiefes Parallelopipedum und CH dessen Diagonalschnitt, so entstehen die zwei dreieckigen Prismen AEGGHF und ECDBGH. Hier ist nun offenbar $\triangle$ AEC $\cong$ $\triangle$ DCE, $\triangle$ FHG $\cong$ $\triangle$ BGH, ferner Parallelogramm AH $\cong$ Par. DG; Par. AG $\cong$ Par. DH, so wie das Parallelogramm EG beiden Prismen gemein ist. Allein beide Prismen decken einander nicht, d. h. sie können nicht so in einander gebracht werden, daß sie nur ein einziges bilden. Woraus soll nun die Gleichheit ihres Körperraumes folgen?

e) Wenn das schiefe Parallelopipedum BG (Fig. 379) durch den Diagonalschnitt BCGF in die zwei dreieckigen Prismen ABCEFG und BCDFGH getheilt wird, so kann das letztere so neben das erstere in der verlängerten Richtung FE und in der verlängerten Ebene HFEG gestellt werden, daß es die

Lage ghfcdb hat, wo diese kleinen Buchstaben den großen, der Lage nach entsprechen. Man erkennt nun sogleich, daß letzteres das Prisma ABCEFG nicht decken kann; allein es wird auch klar, daß beide Prismen eine symmetrische Lage gegen einander haben, weshalb sie auch symmetrische Körper genannt werden.

f) Allein worin besteht denn diese Symmetrie der beiden Prismen? Wenn die Grundflächen FEG und cdb in derselbigen Ebene, und die homologen Seiten FE und cd in einer geraden Linie cdEF liegen, so hat die Grundfläche FEG schon deshalb eine symmetrische Lage mit cdb, weil ∢ dEG = ∢ Edb und folglich EG gerade so zur Rechten, wie db zur Linken geneigt ist. Betrachtet man die beiden Körper, so ist die Seitenfläche AEGC so zur Rechten der Grundfläche FEG geneigt, wie die ihr congruente Seitenfläche hfbd zur Linken von cdb geneigt ist. Ganz dasselbige gilt von den Neigungen der Seitenflächen AEFB und hdcg, so wie auch von CGFB und fbcg. Betrachtet man die homologen Körperwinkel, z. B. jenen bei E und bei d, so ist zwar ∢ AEF = ∢ hdc, ferner ∢ AEG = ∢ hdb und ∢ FEG = ∢ cdb; allein beide Körperwinkel können nicht so in einander gestellt werden, daß sie sich decken. Man kann dieselbe daher ebenfalls symmetrisch gebildete Körperwinkel nennen. Eben dieses gilt von jeden zwei andern homolog liegenden Körperwinkeln.

g) Da dreieckige Pyramiden die einfachsten eckigen Körper sind, so sei (Fig. 380) ABCD eine solche schiefe Pyramide, zu welcher die symmetrische construirt werden soll. — Man verlängere die Ebene der Grundfläche DBC, in ihr auch die Linie DB, nehme BH nach Belieben, mache HF = BD und beschreibe über HF ein dem Dreiecke BCD symmetrisches Dreieck HGF. Nun fälle man aus A auf die Ebene der Grundfläche BCD das Loth AJ, ziehe BJ, JD, mache △ FLH in der Ebene HGF congruent und symmetrisch dem △ DJB, errichte in L auf die Ebene FGHL das Loth LE, nehme LE = JA und ziehe EF, EG, EH, so ist die schiefe Pyramide EFGH mit der gegebenen ABCD symmetrisch. Der Beweis hierüber ist leicht

zu führen. — Auch sieht man sogleich, daß die viereckigen Pyramiden ABCDJ und EHGFL ebenfalls symmetrische sind.

h) Da sich symmetrisch gebildete Körper nicht decken, so muß ihre Gleichheit auf andere Art, als durch eine bloße Erklärung, wie Euclides gethan hat, bewiesen werden.

Es sei (Fig. 381) ABCDEFGH ein schiefes Parallelopipedum, ADHE seine Diagonalebene, so ist zu beweisen, daß Prisma ACDHEG = Prisma ABDHFE.

Man halbire CG in L, errichte LM in der Ebene CH und LJ in der Ebene CE senkrecht auf CL und ziehe JM, so sind CG, AE, DH auf der Dreiecksebene JLM lothrecht. Wird nun das schiefe Parallelopipedum AH von der über JM verlängerten Dreiecksebene LJM durchschnitten, so entsteht das Rechteck LJMK, worauf CG, DH, BF und AE lothrecht ist.

Nun verlängere man die CG, AE, BF und DH über G, E, F und H bis GP = CL, EN = AJ, FO = BK und HQ = DM ist, und ziehe die Verbindungslinien PN, NO, OQ und QP, so ist NOQP ein dem Rechtecke JKML congruentes Rechteck. Auch ist hierdurch ein senkrechtes Parallelopipedum JQ entstanden, welches durch den Diagonalschnitt JMQN in zwei congruente dreieckige Prismen LJMQNP und JKMQON getheilt werden kann, und es ist der Körper CADMJL dem Körper GEHQNP, und der Körper ADBKMJ dem Körper EHFOQN vollkommen congruent. Hieraus entsteht folgende Zusammenstellung

Körper ACM ≅ Körper EGQ
Körper JLH = Körper JLH

Körper (ACM + JLH) = Körper (EGQ + JLH)
d. h. Prisma ACH = Prisma JLQ.

Ferner ist auch

Körper BDJ ≅ Körper FHN
Körper KME = Körper KME

Körper (BDJ + KME) = Körper (FHN + KME)
d. h. Prisma BDE = Prisma KMN. Es war aber Prisma JLQ ≅ Prisma KMN; folglich ist auch Prisma ACH = Prisma BDE.

i) Man sehe über diesen, für die Körperlehre sehr wichtigen Satz Meine Abhandlung: Der 28. Satz des XI. Buchs der Elemente des Euclides, geprüft und neu erwiesen. Mainz, 1818 b. Kupferberg. 33 S. 4to mit 1 Steintafel, worin dieser Gegenstand ferner entwickelt und mit historischen Nachrichten weiter erläutert worden ist.

CCXXXXVI. Zum 29. Satze. a) Da die beiden Parallelopipeden, welche über der nämlichen Grundfläche stehen und deren Seitenflächen in einerlei Ebene fallen, eine dreifach verschiedene Lage haben können, so muß auch der Beweis nach dieser dreifachen Lage geführt werden. Euclides hat nur der einen dieser drei Lagen erwähnt und sich in seinem Beweise auf die bekannte 10. Erklärung dieses Buches bezogen, welche, wie nun bekannt ist, nicht als Beweisgrund gebraucht werden kann.

b) Die erste Lage der zwei Parallelopipeden ist jene, in welcher die Seitenfläche des ersten zugleich die Diagonalebene des zweiten wird. Hier ist nun (Fig. 382) Prisma AMHFGC = Prisma GBPCMH (CCXXXXV) und Prisma GBPCMH = Prisma MNQHBP; folglich auch Parallelopipedum AP = Parallelopipedum MP.

c) Nach der zweiten Lage (Fig. 383) fällt die Seitenebene CMPB des zweiten Parallelopipedums CQ mit ihrer obern Grenzlinie CM in die Oberfläche NDGA des ersten Parallelopipedums NQ. Hier überzeugt man sich leicht, daß die beiden dreieckigen Prismen NCMABP und DVFGOQ einander congruent sind. Wird nun zum ersten der Körper CDGMBOQP gesetzt, so entsteht das erste Parallelopipedum NQ, und setzt man zum zweiten Prisma eben diesen Körper, so entsteht das andere Parallelopipedum CQ, welche daher ebenfalls einander gleich seyn müssen.

d) In der dritten Lage (Fig. 384) fällt die obere Grenzlinie TS der Seitenfläche TSBG des ersten Parallelopipedums NQ in die Oberfläche MFRH des zweiten FQ und schneidet daher die Seitenfläche MHQC in der geraden Linie OU. — Hier ist nun, wie man leicht findet, das Prisma

TSNPGB dem Prisma FRMHCQ congruent. Nimmt man von jedem das kleinere dreieckige Prisma TSMHOU hinweg, so ist Körper HUBPMOGN = Körper RSUQFTOC. Setzt man beiderseits das dreieckige Prisma UBQOGC hinzu, so wird NQ = TQ.

CCXXXXVII. Zum 30. Satze. Diese vierte Lage der beiden Parallelopipeden wird man deutlicher in der (Fig. 385) erkennen. Hier befinden sich über der Grundfläche PDGQ die zwei Parallelepipeden QF und QR, welche, der Annahme gemäß, gleiche Höhen haben. Daher liegen ihre Oberflächen BH und VT mit PG in einer Parallel-Ebene. Wird daher BF über F, CH über H, ferner SV über V und TR über R verlängert, so entsteht das Parallelogramm NMOA, welches der Grundfläche PDGQ congruent ist. Zieht man nun NP, MD, OG und AQ, so muß, nach dem 29. Satze, Parallelopipedum MQ = Parallelopipedum BG und ebenso auch MQ = Parallelopipedum TP seyn, folglich ist auch hier BG = TP.

CCXXXXVIII. Zum 31. Satze. Dieser Beweis kann auch auf folgende Art geführt werden.

a) Wenn sich über der Rhomboide ABCD (Fig. 386) ein schiefes Parallelopipedum befände, so verlängere man die Ebene seiner Oberfläche, errichte aus A, B, C, D vier Lothe auf AC bis zu jener Ebene und verbinde die Endpuncte gehörig, so entsteht ein senkrechtes Parallelopipedum, welches dem gegebenen schiefen gleich am Inhalte ist (29. u. 30. Satz).

b) Wenn über der Rhomboide ABCD (Fig. 387) ein senkrechtes Parallelopipedum steht, so läßt sich dasselbe in ein ihm gleiches von der nämlichen Höhe verwandeln, dessen Grundfläche ein der gegebenen Rhomboide gleiches Rechteck ist. Denn wenn man AE auf DC und BF auf ihre Verlängerung lothrecht zieht, so ist ABFE = ABCD. Nimmt man nun von dem gegebenen Parallelopipedum das senkrechte Prisma weg, dessen Grundfläche das Dreieck AED ist und setzt dasselbe gehörig an BCF, so muß das neu entstehende Parallelopipedum über dem Rechtecke ABFE dem zuerst gegebenen über ABCD gleich seyn.

c) Wenn (Fig. 388) sich über dem Rechtecke ACEG ein lothrechtes Parallelopipedum befindet, und man schneidet dasselbe nach dem Diagonalschnitte GC, legt dann in der beliebigen Entfernung AH eine schneidende Parallelebene HD und durch die Durchschnittslinie bei J eine mit CE parallele schneidende Ebene BF, so sind die beiden lothrechten Parallelopipeden über den Grundflächen AJ und JE gleich am Inhalte. Denn das Prisma über GAC ist jenem über GEC, jenes über GHJ dem über GFJ und das über JBC jenem über JDC congruent; folglich bleiben als gleiche Differenzen die beiden lothrechten Parallelopipeden über AJ und JE übrig.

d) Nun seien (Fig. 389) die beiden Parallelogramme ABCD und FGHJ von gleicher Größe, so müssen auch die über ihnen stehenden gleich hohen Parallelopipeden gleich an Inhalte seyn. Denn ABCD ist dem Rechtecke aus AE und DC; FGHJ aber dem Rechtecke aus GK und JH gleich. Daher sind auch die Parallelopipeden über beiden Rechtecken einander gleich. Macht man nun Rechteck ABJH (Fig. 388) = FGHJ, dann BC = DC, zieht CJ, verlängert sie, bis sie die verlängerte AH in G schneidet, zieht durch G die GE mit AC, durch C die CE mit AG gleichlaufend und verlängert HJ nach D und BJ nach F, so ist ABJH = JDEF; allein ABJH = Rechteck aus AE und DC; folglich Rechteck aus AE und DC = Rechteck JDEF. Nun sind die Parallelopipeden über AJ und JE einander gleich. Folglich müssen es auch die über FH und AC seyn.

e) Da jedes dreieckige Prisma die Hälfte des ihm entsprechenden Parallelopipedums ist, so sind auch alle dreieckige Prismen von gleichen Grundflächen und Höhen gleich am Körperinhalte, wenn gleich ihre Grundflächen nicht congruent sind. — Auch kann man leicht ein gegebenes dreieckiges Prisma in ein ihm gleiches Parallelopipedum von derselbigen Höhe, und umgekehrt, verwandeln.

f) Auf ähnliche Art können mehrere gegebene dreieckige Prismen oder Parallelopipeden von einerlei Höhe in ein einziges Prisma oder in ein einziges Parallelopipedum verwandelt werden, welches ihnen zusammengenommen gleich ist.

g) Da man jedes vieleckige Prisma, wie sich leicht durch Zeichnungen nachweisen läßt, durch Diagonalebenen in soviele dreieckige Prismen theilen läßt, als die Grundfläche Seiten hat, weniger zwei, so müssen auch alle mehreckigen Prismen einander gleich seyn, wenn sie gleiche Grundflächen und Höhen haben, obwohl diese Grundflächen Vielecke von verschiedener Seitenzahl sind. Das n eckige Prisma kann in n—2 dreieckige durch Diagonalflächen zertheilt werden.

CCXXXXIX. Zum 32. Satze. a) Es wird bei diesem Satze vorausgesetzt, daß die Grundflächen der beiden Parallelopipeden solche Parallelogramme sind, wovon eines nicht als Verlängerung des andern angesehen werden kann. Wäre das eine in der Verlängerung des andern, so ist die Behauptung bereits oben (25. Satz) bewiesen. Bezeichnet man diese Körper mit P, p, ihre Höhen mit H, h und ihre Grundflächen mit G, g, so ist, bei H = h,

$$P : p = G : g.$$

b) Auch verhalten sich zwei Parallelopipeden von gleicher Grundfläche wie ihre Höhen. Denn wenn (Fig. 375) BDGF als die gemeinschaftliche Grundfläche angesehen wird, so errichte man über dieselbe ein lothrechtes Parallelopipedum BM, dessen Höhe JB der Höhe des kleinern gegebenen und ein zweites lothrechtes BH, dessen Höhe AB jener des größern gegebenen gleich ist. Hier muß BM dem kleinern und BH dem größern gegebenen Parallelopipedum gleich seyn. Nimmt man nun, wie oben (CCXXXXII.), das kleine Parallelopipedum AQ als Maß von AG und von JG, so ist AQ so oft in AG und in JG enthalten, wie oft AN in AB und in JB enthalten ist. Folglich muß sich AG : JG = AB : JB verhalten. Nach der vorigen Bezeichnung (in a) ist also, bei G = g,

$$P : p = H : h.$$

c) Wären nun bei zwei Parallelopipeden sowohl die Grundflächen als die Höhen ungleich, so construire man ein drittes = π, welches mit P die Grundfläche = G und mit p die Höhe = h gemein hat. Hier ist nun

$P : \pi = H : h$ und

$\pi : p = G : g$, folglich

$P : p = G \times H : g \times h$

d. h. Parallelopipeden von verschiedenen Grundflächen und Höhen stehen in einem zusammengesetzten Verhältnisse ihrer Grundflächen und Höhen.

d) Da dreieckige Prismen die Hälften der ihnen entsprechenden Parallelopipeden sind, so gelten die hier (a, b u. c) entwickelten Proportionen auch von dreieckigen Prismen. Da vieleckige Prismen sich durch Diagonalebenen in dreieckige theilen lassen, deren Summen jene Körper sind, so haben diese Proportionen auch bei vieleckigen Prismen überhaupt Statt.

CCL. Zum 33. Satze. a) Es sei (Fig. 377) Prisma AKLGJH ähnlich dem Prisma ACBDFE, so ist, wenn dieses durch P und jenes durch p, die Grundfläche DEF mit G, GHJ mit g, die Höhe AD mit H und AG mit h bezeichnet wird,

$$P : p = G \times H : g \times h.$$

Allein da $G \sim g$, so ist auch

$G : g = DE^q : GH^q$ folglich

$P : p = DE^q \times H : GH^q \times h$

Aber es ist $DE : GH = H : h$, folglich auch

$P : p = DE^q \times DE : GH^q \times GH$ d. h.

$P : p = DE^3 : GH^3$ und daher auch

$P : p = DF^3 : GJ^3 = AD : AG^3$.

b) Da ähnliche dreieckige Prismen die Hälften von ähnlichen Parallelopipeden sind, so stehen auch ähnliche Parallelopipeden im Verhältnisse der Würfelzahl ihrer ähnlich liegenden Seiten. — Da ferner ähnliche vieleckige Prismen aus ähnlichen dreieckigen bestehen, und die Summen gleichvieler ähnlicher Theile sich wie diese Theile einzeln genommen verhalten, so verhalten sich überhaupt alle ähnliche vieleckige prismatische Körper wie die Würfelzahl ihrer homologen Seiten.

c) Bezeichnet man diese ähnlichen eckigen Prismen mit P und p, ihre homologen Seiten mit S und s, so ist, für $S : s = 2 : 1$ nun auch $P : p = 8 : 1$. Für $S : s = 3 : 1$ würde $P : p = 27 : 1$ u. s. w.

Wäre (Fig. 377) $AL = \frac{1}{2} AB$ und das kleinere Prisma dem größern ähnlich, so würde jenes $= \frac{1}{8}$ von diesem seyn. Man kann dieses auch dadurch zeigen, daß das größere durch acht kleinere, unter sich gleiche genau ausgefüllt werden kann.

d) Wenn a, b, c, d vier gerade Linien bedeuten und es ist $a : b = b : c = c : d$, so ist auch $a : d = a^3 : b^3$. Denn hier wird $d = \frac{c^2}{b}$ und $c = \frac{b^2}{a}$, folglich auch $d = \frac{b^4}{a^2} : b = \frac{b^3}{a^2}$, daher ist nun $a : d = a : \frac{b^3}{a^2} = a^3 : b^3$. Nennt man hier die über a und b beschriebenen ähnlichen eckigen prismatischen Körper P und p, so ist $P : p = a^3 : b^3$, folglich auch $P : p = a : d$.

CCLI. Zum 34. Satze. a) Es seien die gegebenen Parallelopipeden P und p, ihre Grundflächen G und g, ihre Höhen H und h, so ist, nach dem Frühern,

$$P : p = G \times H : g \times h.$$

Wenn nun $P = p$ ist, so muß auch

$$G \times H = g \times h \text{ und folglich}$$
$$G : g = h : H$$

seyn, welches die erste Behauptung dieses Satzes ist.

b) Wäre aber $G : g = h : H$, so müßte auch $G \times H = g \times h$ und folglich $P = p$ seyn, welches die zweite Behauptung ist.

c) Was hier von Parallelopipeden bewiesen ist, gilt eben so von eckigen prismatischen Körpern überhaupt, wie aus dem Bisherigen hervorgeht.

d) Daher sind alle eckige prismatische Körper einander gleich, wenn die Producte aus ihren Grundflächen in ihre Höhen einander gleich sind, obwohl sie verschiedenartige Grundflächen haben, und man kann leicht vermittelst dieses Satzes einen dieser Körper in einen andern ihm gleichen von ganz anderer Gestalt verwandeln.

CCLII. Zum 35. Satze. Ein Theil der Hypothesis dieses Satzes setzt voraus, daß man aus dem Scheitelpuncte D des ebenen Winkels EDF eine Linie DL so auf dessen Ebene stelle, daß sie mit DE und mit DF die nämlichen Winkel

bildet, welche die aus A auf die Ebene des ihm gleichen Winkels BAC gezogene Linie AH mit AB und mit AC bildet. Allein, wie wird dieser Bedingung entsprochen? — Am Einfachsten durch Anwendung des 26. Satzes, wodurch der Körperwinkel bei D jenem bei A gleich gemacht wird. Ist dieses geschehen, so fällt DL längs AG. Zieht man nun aus H auf die Ebene BAC das Loth HJ, und zieht JA, so entsteht der Winkel HAJ. Wird nun in der verlängerten AH der Punct G genommen und aus ihm das Loth GK auf BAC gezogen, so muß dasselbe in die Verlängerung von AJ eintreffen. Denn da GK und HJ Lothe auf BAC sind, so sind sie mit einander parallel, und liegen somit in einerlei Ebene. Allein HG liegt in der Ebene AHJ, folglich muß sich auch GK in dieser Ebene befinden.

CCLIII. Zum 36. Satze. a) Es seien a, b und c die drei gerade Linien, bei welchen die stetige Proportion $a : b = b : c$ Statt findet, so ist $ac = b^2$ d. h. das Rechteck aus a und c ist dem Quadrate von b gleich. Da aber auch $abc = b^3$ seyn muß, so ist das lothrechte Parallelopipedum aus a, b und c dem Würfel aus b gleich. Wären aber a, b und c die drei, an einem Körperwinkel liegenden Seitenkanten eines schiefen Parallelopipedums, so wäre dieses so groß, als ein gleichkantiges schiefes von dem nämlichen Körperwinkel, dessen Kante $= b$ ist.

b) Wäre (Fig. 201) JE ein lothrechtes Parallelopipedum und $FE : ED = ED : EG$, so würde dieser Körper dem Würfel über ED gleich seyn. Denn

Prpdm. JE : Würf. $ED = FE \cdot EG \cdot ED : ED^3$. Allein
es ist $FE \cdot EG \cdot ED = ED^3$, folglich auch
Prpd. JE = Würf. ED.

CCLIV. Zum 37. Satze. Wenn A, B, C, D vier gerade Linien als homologe Seiten von vier ähnlichen Parallelopipeden sind, und es ist $A : B = C : D$, so muß auch $A^3 : B^3 = C^3 : D^3$ seyn. Allein jene Körper verhalten sich wie die Würfel dieser Linien; folglich müssen auch diese vier Körper einander paarweise proportionirt seyn. Eben so einfach ist der Beweis des umgekehrten Satzes.

CCLV. Zum 38. Satze. Dieser Satz kann auch sehr einfach auf folgende Art bewiesen werden. Man ziehe aus E auf AD das Loth EG und aus G auf AD in der Ebene AB das Loth GF, so steht EG auf AB lothrecht. Wenn nun die GE nicht in der Ebene CD läge, so müßte das aus G auf AD in der Ebene CD gezogne Loth in der Ebene EGF entweder diesseits von GE oder jenseits von GE liegen, welches beides unmöglich ist, weil aus G auf FG in der Ebene FGE nur ein Loth möglich ist.

CCLVI. Zum 39. Satze. Auch läßt sich die Wahrheit dieses Satzes auf folgende Art bequem übersehen. Da die Ebenen DA, JM und FG mit einander parallel sind und alle drei von der Ebene DEGB geschnitten werden, so sind auch die Durchschnittslinien TR und EG parallel. Daher ist $\triangle DTS \sim \triangle DEG$ und folglich $DT : DE = TS : EG$; allein es ist $DT = \frac{1}{2} DE$; folglich auch $TS = \frac{1}{2} EG$. Es ist aber $EG = TR$, folglich $TS = \frac{1}{2} TR$.

CCLVII. Zum 40. Satze. a) Der Sinn und Beweis dieses Satzes kann auf folgende Art sehr faßlich übersehen werden. Es sei (Fig. 390) ACBDFE ein dreieckiges Prisma, man verlängere dessen Grundfläche DFE, nehme $FH = DF$, ziehe EG mit DH gleichlaufend, nehme $EG = FH$ und ziehe GH, so ist FEGH ein Parallelogramm $= 2 \triangle DFE$. Zieht man nun die geraden CH und BG, so ist CFHBEG ein dreieckiges Prisma, welches dem vorhin genannten gleich ist, weil man nur das Parallelopipedum FJ zu ergänzen braucht, um sich zu überzeugen, daß jedes der beiden genannten dreieckigen Prismen die Hälfte davon ist.

b) Noch theilen wir folgenden Beweis dieses Satzes mit, wenn $\measuredangle ADE = \measuredangle ADF = \measuredangle DFE = R$ ist. Hier haben die rechtwinkeligen Dreiecke CFH und DFE einerlei Höhe $HF = DF$, folglich ist

$\triangle CFH : \triangle DFE = CF : FE$, daher ist

$\triangle CFH \times FE = \triangle DFE \times CF$ und folglich

Prisma CFHBEG = Prisma ACBDFE.

Anmerkungen
zum
zwölften Buche des Euclides.

CCLVIII. Zum 1. Satze. a) Ein anderer Beweis dieses Satzes ist folgender. Wenn man aus den Mittelpuncten beider Kreise, N und O die Halbmesser NC, ND und OH, OJ nach den Endpuncten zweier homologen Seiten CD und HJ zieht, so sind CND und HOJ zwei gleichschenkelige Dreiecke. Da nun, wenn man AC, AD und FH, FJ zieht, wegen $\triangle$ ABC $\sim \triangle$ FGH; $\triangle$ AED $\sim \triangle$ FKJ und $\triangle$ BAE $\sim \triangle$ GFK auch $\measuredangle$ BAC $= \measuredangle$ GFH, $\measuredangle$ EAD $= \measuredangle$ KFJ und $\measuredangle$ BAE $= \measuredangle$ GFK, und folglich $\measuredangle$ CAD $= \measuredangle$ HFJ ist, so muß auch $\measuredangle$ CND $= \measuredangle$ HOJ und somit $\triangle$ CDN $\sim \triangle$ HJO seyn. Nun ist, wenn man das größere Polygon mit P, das kleinere mit p bezeichnet,

$$P : p = CD^{\square} : HJ^{\square}, \text{ allein}$$

$$CD^{\square} : HJ^{\square} = CN^{\square} : OH^{\square} = BL^{\square} : GM^{\square},$$

folglich $P : p = BL^{\square} : GM^{\square}$.

b) Wäre $BL = 2\,GM$, so müßte $P:p = 1:4$ seyn. Und im Allgemeinen, wenn $BL:GM = n:1$ ist, so muß $P:p = n^2:1$ seyn.

CCLIX. Zum 2. Satze. a) Einer der Hülfssätze zu dem Beweise dieses Satzes ist der erste Satz des X. Buches, welchen Euclides auf folgende Art darstellt.

Wenn zwei ungleiche (aber gleichartige) Größen (Fig. 391) AB und C gegeben sind, und man nimmt von der größern AB mehr als die Hälfte, von dem bleibenden Reste wiederum mehr als die Hälfte und so fort, so bleibt einmal ein Rest, welcher kleiner als die kleinere Größe C ist.

Es sei DE ein Vielfaches von C und größer als AB. Man theile DE in die, der C gleiche Theile DF, FG, GE,

nehme von der AB mehr als ihre Hälfte d. h. BH und vom Reste AH wieder mehr als ihre Hälfte d. h. HJ und dieses so lange, bis in AB soviele Abschnitte als in DE sind.

Da nun AB $<$ DE und von AB mehr als die Hälfte, BH, von DE aber weniger als die Hälfte, EG, weggenommen wird, so ist der Rest AH $<$ DG. Folglich da von AH mehr als die Hälfte, HJ, von DG aber nur die Hälfte, GF, weggenommen wird, so ist der Rest AJ $<$ DF. Nun ist DF $=$ C, also auch AJ $<$ C.

Auf gleiche Art wird der Beweis geführt, wenn bei der größern AB das Weggenommene immer nur die Hälfte beträgt.

b) Der vorhergehende Hülfssatz läßt sich auch so beweisen. Wenn $a < b$ und mit ihm gleichartig ist, so muß ein Glied der Reihe: $2a$, $3a$, $4a$, $5a$ ..... na einmal größer werden als b. Dieses ist für sich selbst einleuchtend. Daher muß auch in der Reihe: $2a$, $4a$, $8a$, $16a$, $32a$ ..... $2^n a$ ein solches Glied $> b$ seyn, und folglich muß auch umgekehrt in der Reihe $\frac{b}{2}, \frac{b}{4}, \frac{b}{8}, \frac{b}{16}, \frac{b}{32} \ldots \frac{b}{2^n}$ einmal ein Glied $< a$ seyn.

c) Wenn D und d die Durchmesser F und f die Flächen zweier Kreise bezeichnen, so ist für $D : d = 2 : 1$ oder $= 3 : 1$, oder $= 4 : 1$, oder $= n : 1$, nun auch $F : f = 4 : 1$, oder $= 9 : 1$, oder $= 16 : 1$, oder $= n^2 : 1$.

d) Wenn man die Durchmesser zweier Kreise lothrecht aufeinander stellt und die Hypotenuse zieht, so ist diese der Durchmesser eines Kreises, welcher den beiden gegebenen zusammengenommen gleich ist. Auf ähnliche Art können mehrere Kreise in einen einzigen verwandelt werden, so wie auch die Differenz zweier Kreise durch einen Kreis dargestellt werden kann. Ueberhaupt kann man Alles, was in dieser Hinsicht oben (LXXIII.) von den Quadraten bemerkt wurde, nun auch auf die Kreisflächen anwenden.

CCLX. Zum 3. Satze. a) Daß die beiden kleinen Pyramiden einander congruent sind, folgt, nach dem Frühern (CLXXXXVIII.), nicht daraus, weil sie von gleich vielen, gleichen und ähnlichen Ebenen begrenzt sind, sondern daraus,

daß die Körperwinkel bei A und H, bei E und J, bei G und K, und bei H und D auch einander decken. Daher können beide dreieckige Pyramiden so in einander gestellt werden, daß sie nur eine einzige bilden.

b) Auf gleiche Art wird auch die Aehnlichkeit der beiden kleineren Pyramiden mit der gegebenen Pyramide erkannt.

CCLXI. Zum 4. Satze. Man kann sich auch, zum Behufe des Beweises, die Lothe von A auf BGC und von D auf EHF denken; welche, nach der Annahme, einander gleich sind. Daher sind auch ihre Hälften gleich und es ist

JOKBLN : PRQETV = BLN : ETV, folglich

JOKBLN + OLMKNC : PRQETV + RTSQVF = BLN : ETV = BGC : EHF. Werden nun die kleinern Pyramiden auf gleiche Art getheilt, so ist, wenn man die in der ersten entstehenden Prismen mit S und die in der andern entstehenden mit s bezeichnet, auch jetzt wieder

S : s = JOK : PRQ = BGC : EHF

und eben dieses gilt auch von allen folgenden Prismen. Daher verhält sich die Summe aller Prismen in der ersten Pyramide zur Summe aller, durch eine gleich vielfache Theilung der zweiten Pyramide entstehenden Prismen, wie BGC : EHF.

CCLXII. Zum 5. Satze. a) Man pflegt diesen, der Stereometrie sehr wichtigen Satz auch auf folgende Art zu beweisen. Es seien die Pyramiden (Fig. 392) ABCD und EFGH von einerlei Höhe aber verschiedenen Grundflächen BCD und FGH. Wird nun jede derselben in sehr kleiner Entfernung von der Grundfläche parallel mit ihr und beiderseits in gleichem Abstande geschnitten, so entstehen die beiden Körper bcdBCD und fghFGH, welche als dreieckige Prismen von einerlei Höhe zu betrachten sind und somit sich wie ihre Grundflächen verhalten. Fährt man so fort, beide Pyramiden durch ähnliche Parallelebenen zu theilen, so hat bei allen paarweise hierdurch entstehenden Körpern eben dieses Verhältniß Statt, und die Summe aller Prismen in der ersten Pyramide muß sich zur Summe aller Prismen in der zweiten Pyramide verhalten, wie sich BCD : FGH verhält. Allein diese Summen bilden, da

beide Pyramiden gleiche Höhen haben, den Inhalt dieser Pyramiden. Folglich ist auch ABCD : EFGH = BCD : FGH.

b) Es ist also leicht, eine dreieckige Pyramide zu bilden, welche mit einer gegebenen dreieckigen einerlei Höhe hat und in irgend einem bestimmten Verhältnisse ihres Inhaltes gegen sie stehen soll. Wären die Grundflächen dieser Körper G und g, und das gegebene Verhältniß = m:n, so dürfte man nur G : g = m : n machen, um der Foderung zu entsprechen.

CCLXIII. Zum 6. Satze. a) Jede vieleckige Pyramide kann nämlich durch Diagonalflächen in so viele dreieckige getheilt werden, als die Grundfläche Seiten hat, weniger zwei; folglich die neckige in n — 2 dreieckige. Denn jedes geradlinige n Eck kann durch Diagonalen, welche aus einem Winkelpuncte ausgehen, in n — 2 Dreiecke getheilt werden, und durch jede dieser Diagonalen und durch die Spitze der Pyramide geht eine Diagonalebene, welche von der gegebenen Pyramide eine dreieckige abschneidet.

b) Wenn eine viereckige Pyramide mit einer dreieckigen gleiche Grundfläche und Höhe hat, so haben beide gleichen Inhalt. Es seien (Fig. 393) EFGHJ und ABCD diese Pyramiden, so theile man die erstere durch die Ebene EFH in die zwei dreieckigen EFJH und EFGH. Hier ist nun

EFJH : EFGH = FJH : FGH, daher

EFJG + EFGH : EFGH = FJH + FGH : FGH, d. h.

EFGHJ : EFGH = FGHJ : FGH, allein

EFGH : ABCD = FGH : BCD, folglich

EFGHJ : ABCD = FGHJ : BCD. Nun ist

FGHJ = BCD, folglich auch

EFGHJ = ABCD.

c) Wenn also überhaupt mehrere Pyramiden gleiche, aber verschiedenartige Grundflächen und einerlei Höhen haben, so sind sie gleich am Inhalte. Es läßt sich daher eine gegebene 3eckige in eine ihr gleiche 4, 5, 6 ... neckige von der nämlichen Höhe, und umgekehrt verwandeln.

CCLXIV. Zum 7. Satze. a) Anschaulicher als in der Zeichnung des Euclides geht dieser Satz aus dem dreieckigen

Prisma ACBDFE (Fig. 394) hervor. Wenn eine Ebene durch die Puncte C, D und E gelegt wird, so entsteht die dreiseitige Pyramide CDFE, welche mit dem gegebenen Prisma Grundfläche und Höhe gemein hat. Auch bleibt eine vierseitige Pyramide, deren Grundfläche ABED und deren Spitze C ist, übrig. Wird diese nun durch die Ebene DCB in zwei dreieckige ABDC und DEBC getheilt, so haben diese ebenfalls unter sich gleiche Grundfläche und Höhe. Allein die Pyramide ABDC läßt sich auch so ansehen, daß ACB ihre Grundfläche und D ihre Spitze ist, wo sie denn mit der ersten Pyramide CDFE Grundfläche und Höhe gemein hat. — Folglich haben die drei Pyramiden einerlei Grundfläche und Höhe und daher auch gleichen Inhalt.

b) Daher ist jede dreieckige Pyramide der sechste Theil eines Parallelopipedums, welches mit ihr gleiche Grundfläche und Höhe hat. Auch kann jede dreieckige Pyramide hierdurch in ein ihr gleiches dreieckiges oder auch mehrseitiges Prisma oder Parallelopipedum von derselbigen Höhe verwandelt werden, denn man darf nur die Grundfläche des dreieckigen Prisma's $= 1/3$ oder jene des Parallelopipedums $= 1/6$ der Grundfläche der gegebenen Pyramide machen und den Körper von der nämlichen Höhe mit ihr vollenden.

c) Alle früher von eckigen Prismen bewiesenen Verhältnisse müssen daher nun auch von dreieckigen Pyramiden gelten. Es werden diese Körper mit P und p, ihre Grundflächen mit G und g, ihre Höhen mit H und h bezeichnet, so ist, bei $G = g$

$$P : p = H : h,$$

und bei $H = h$

$$P : p = G : g$$

und überhaupt

$$P : p = G \times H : g \times h,$$

daher $P = p$, wenn $G \times H = g \times h$ d. h. wenn $G : g = h : H$ ist.

d) Daher ist es leicht, jede gegebene Pyramide in ein ihr gleiches Prisma von gleichem Inhalte, aber von verschiedener Grundfläche und Höhe mit ihr, und umgekehrt, zu verwandeln. Ueberhaupt ist der allgemeine Satz bewiesen:

Alle eckige pyramidalische und prismatische Körper stehen im zusammengesetzten Verhältnisse ihrer Grundflächen und Höhen.

CCLXV. Zum 8. Satze. a) Wenn die Pyramide (Fig. 395) DNMG in dem willkührlichen Puncte B durch die mit NMG parallele Ebene BPC geschnitten wird, so ist die kleine Pyramide DBPC der ganzen ähnlich. Ist nun DU ein Loth von D auf NMG, so muß dasselbe die Grundfläche BPC in einem ähnlich liegenden Puncte Q schneiden; so, daß, wenn NU und BQ gezogen wird, das $\triangle$ DNU $\sim$ $\triangle$ DBQ ist, wie man leicht findet. Nun ist

DNMG : DBPC = NMG $\times$ DU : BPC $\times$ DQ. Allein

NMG : BPC = NM^q : BP^q und

NM : BP = DU : DQ, folglich auch

DNMG : DBPC = $NM^q \times$ NM : $BP^q \times$ BP.

Allein $NM^q \times$ NM stellt ein Parallelopipedum dar, dessen Grundfläche ein Quadrat und dessen Höhe der Seite dieses Quadrats gleich ist. Daher ist $NM^q \times$ NM der Würfel von der Seite NM und $BP^q \times$ BP der Würfel der Seite BP. Folglich ist der Satz bewiesen. — Ein ähnlicher Beweis hat bei ähnlichen vieleckigen Pyramiden Statt.

b) Wenn DB : DN = 1 : 2, oder = 1 : 3, oder = 1 : 4, oder überhaupt = 1 : n ist, so muß auch P : p = 1 : 8 oder = 1 : 27 oder = 1 : 64, oder überhaupt = $1 : n^3$ seyn. Da (Fig. 209) AJ = $\frac{1}{2}$ AB ist, so muß AJOK = $\frac{1}{8}$ ABGC seyn, wie auch die unmittelbare Construction lehrt, da AJOK = OLGM und jede von beiden = $\frac{1}{3}$ JOKBLN = $\frac{1}{3}$ LOMNKC ist.

CCLXVI. Zum 9. Satze. Dieser Satz ist bereits oben (CCLXIV, c) als leichtes Corollarium erwiesen worden, und zwar nicht bloß für dreieckige Pyramiden, wie Euclides hier thut, sondern für vieleckige jeder Art.

CCLXVII. Zum 10. Satze. a) Gleichwie Euclides in dem ersten Falle dieses Beweises gezeigt hat, daß die, in den gegebenen Cylinder beschriebenen Prismen zusammengenommen den Inhalt des Cylinders so genau darstellen, daß der Unterschied weniger als irgend eine angebliche Größe beträgt, so kann vollkommen auf gleiche Art bewiesen werden, daß die Summe der auf dieselbigen Grundflächen dieser Prismen beschriebenen Pyramiden von der nämlichen Höhe auch dem

Inhalte des Kegels, von derselbigen Grundfläche und Höhe, so nahe kömmt, daß der Unterschied kleiner ist, als jede angebliche Größe. Daher kann jener Cylinder als die Summe der bemerkten Prismen und dieser Kegel als die Summe der bemerkten Pyramiden angesehen werden. Allein diese letztere Summe ist $^1/_3$ der erstern, folglich muß auch der Kegel $^1/_3$ des Cylinders von derselbigen Grundfläche und Höhe seyn.

b) Nach dieser Darstellung kann jeder Cylinder als ein prismatischer und jeder Kegel als ein pyramidalischer Körper von unendlich vielen Seiten angesehen werden, welcher mit dem Kegel oder Cylinder einerlei Höhe hat. Daher werden alle jene Verhältnisse, welche bisher von den eckigen prismatischen und pyramidalischen Körpern bewiesen sind, auch von den Cylindern und Kegeln gelten. Wenn daher C und c zwei Cylinder, K und k zwei Kegel, H und h ihre Höhen und G und g ihre Grundflächen bedeuten, so ist, bei $H = h$,

$C : c = G : g$ auch

$K : k = G : g$, ferner, bei

$G = g$ ist $C : c = H : h$ und

$K : k = H : h$; dann

$C : c = K : k = G \times H : g \times h$, und wenn

$G : H = g : h$ ist, so muß auch $C = c$ oder $K = k$ seyn.

Euclides beweiset indessen diese Sätze noch besonders und zwar auf ähnliche Art, wie er den 10. Satz bewiesen hat.

CCLXVIII. Zum 11. Satze. Daher ist es leicht, mehrere Cylinder oder Kegel in einen Cylinder oder Kegel von derselbigen Höhe zu verwandeln, welcher den gegebenen zusammengenommen gleich ist. Auch läßt sich jeder Kegel in einen ihm gleichen Cylinder, und umgekehrt ein Cylinder in einen ihm gleichen Kegel von der nämlichen Höhe verwandeln. Auf ähnliche Art läßt sich der Unterschied zweier Cylinder oder Kegel von gleicher Höhe darstellen. Auch kann $^1/_2$, $^1/_3$, $^2/_5$ und überhaupt $\frac{n}{m}$ eines gegebenen Cylinders oder Kegels in einen Cylinder von der nämlichen Höhe verwandelt werden. In allen diesen Fällen darf nur die zu findende Grundfläche das

angegebene Verhältniß zu haben, damit es auch von den Körpern selbst gelte, welche mit den gegebenen einerlei Höhe haben.

CCLXIX. Zum 12. Satze. a) Dieser Satz setzt die Auflösung der Aufgabe voraus: Cylinder und Kegel zu construiren, welche einander ähnlich sind. Es sei (Fig. 396) ABCD ein senkrechter Cylinder, so ist seine Axe EF auf der Grundfläche lothrecht. Nimmt man nun hier AE : AG = AB: AD, in der Zeichnung wie 1 : 2, und bildet einen senkrechten Cylinder AEHG, dessen Axe JK ebenfalls auf GH lothrecht steht, so ist dieser kleine Cylinder dem größern ähnlich. Wird aber ein gegebener Kegel ABC (Fig. 397) durch den willkührlichen Punct E durch eine Ebene parallel mit der Grundfläche geschnitten, so ist der Kegel AEF ebenfalls dem ganzen Kegel ABC ähnlich. Auch hier hat man AD : BC = AG : EF.

b) Ueberhaupt verhalten sich ähnliche Cylinder und Kegel wie die Würfel ihrer ähnlich liegenden Seitenlinien. Wäre z. B. (Fig. 396) AG : AD = 1 : 2, so würde auch Cylinder AH : Cyl. AC = 1 : 8 seyn. Eben so wäre auch (Fig. 397) Keg. AEF : Keg. ABC = 1 : 8, wenn AE : AB = 1 : 2 wäre.

CCLXX. Zum 13. Satze. Ein anderer Beweis dieses Satzes ist folgender. Es sei (Fig. 398) ABHG ein gegebener Cylinder, welcher in dem willkührlichen Punct E von der Ebene EF parallel mit GH geschnitten wird, so soll bewiesen werden, daß sich Cyl. AH : Cyl. EH = AG : EG verhält.

Da die Linien AG und EG ein gemeinschaftliches Maß haben, so sei CG dasselbe. Legt man durch C, mit GH gleichlaufend, eine Durchschnittsebene, so entsteht ein kleiner Cylinder CH; welcher so oft in AH und EH enthalten ist, wie oft es CG in AG und in EG ist. Wäre daher AG = m . CG und EG = n . CG, so muß auch AH = m . CH und EH = n . CH und folglich AH : EH = m : n = AG : EG = JL : KL seyn.

Ist der gegebene Cylinder ein senkrechter, so sind AG und EG zugleich die Höhen des ganzen und des kleinern Cylinders. Wenn er aber schief ist, so sieht man leicht, daß sich diese Linien so zu einander verhalten, wie die von A und E auf GH gefällten Lothe.

CCLXXI. Zum 14. Satze. a) Euclides setzt hier, da er die Axen als Höhen angibt, senkrechte Cylinder und senkrechte Kegel voraus. Es muß aber gezeigt werden, daß die Behauptung auch von schiefen Körpern gilt.

Der 11. Satz, nach welchem sich sowohl Cylinder als Kegel von gleichen Höhen wie ihre Grundflächen verhalten, hat nicht bloß bei senkrechten, sondern, wie man sich leicht aus dem Beweise überzeugt, auch bei schiefen Körpern Statt. Wenn daher schiefe Cylinder und Kegel gleiche Höhen haben, so verhalten sie sich ebenfalls wie ihre Grundflächen.

b) Daher sind zwei schiefe Cylinder oder zwei schiefe Kegel einander gleich, wenn sich bei gleichen Grundflächen und verschiedener Schiefe, gleiche lothrechte Höhen haben. Man kann daher jeden gegebenen Cylinder oder Kegel leicht in einen andern, ihm gleichen verwandeln, dessen Axe irgend einen gegebenen Winkel mit seiner Grundfläche bildet.

c) Wenn nun (Fig. 399) die zwei Cylinder ABCD und EFGH gleiche (in einerlei Ebene liegenden) Grundflächen DC und HG, aber verschiedene Höhen BJ und FL, auch verschiedene Schiefen haben, so verlängere man nur die Ebene EF bis MN, so ist Cyl. EG = Cyl. MC und NO = FL. Da aber Cyl. AC : Cyl. MC = BJ : NO, so muß auch Cyl. AC : Cyl. EG = BJ : FL seyn.

d) Da die Kegel, als Drittheile der ihnen entsprechenden Cylinder, mit ihnen gleiche Verhältnisse haben, so gilt dieser Satz auch von den Kegeln. Auch können durch Hülfe desselben diese Körper leicht in einander verwandelt werden.

CCLXXII. Zum 15. Satze. a) Es seien C und c zwei Cylinder, G und g ihre Grundflächen, H und h ihre Höhen, so denke man sich einen dritten Cylinder C, der eine Grundfläche G und eine Höhe h hat. Hier ist

C : C = H : h (14. Satz) und

C : c = G : g (11. Satz) folglich

C : c = G × H : g × h. Wenn nun

G × H = g × h, d. h.

G : g = h : H

ist, so muß auch $C = c$ seyn. Wäre aber $C = c$, so müßte auch $G \times H = g \times h$ und folglich $G : g = h : H$ seyn.

Daß eben diese Verhältnisse auch von Kegeln gelten, versteht sich nunmehr von selbst.

b) Daher ist nunmehr, wenn P und p prismatische und pyramidalische Körper überhaupt, mit Einschluß der Cylinder und Kegel, G und g ihre Grundflächen, H und h ihre Höhen bedeuten, ganz im Allgemeinen bewiesen:

1. Bei $G = g$ ist $P : p = H : h$.
2. Bei $H = h$ ist $P : p = G : g$.
3. Bei $G > g$ und $H > h$ ist $P : p = G \times H : g \times h$.
4. Bei $G \times H = g \times h$ ist $P = p$.
5. Bei $P = p$ ist $G \times H = g \times h$.

c) Nach diesen Sätzen ist es nun sehr leicht, prismatische, pyramidalische, cylindrische und kegelförmige Körper gegenseitig in einander zu verwandeln und ihrer Größe nach mit einander zu vergleichen.

CCLXXIII. Zum 16. Satze. Daß das von J auf BD gefällte Loth JK nicht in G eintreffen kann, folgt daraus, weil dann aus G auf BG zwei Lothe, GA und GJ Statt hätten, was unmöglich ist. Eben so wenig kann dieses Loth zwischen G und E eintreffen. Aber von J nach D kann es auch nicht fallen. Denn wenn man aus dem Mittelpuncte des Kreises nach J einen Halbmesser zöge, so entstände über JD ein gleichschenkeliges Dreieck, worin der Winkel bei J auch ein rechter wäre, was widersprechend ist.

CCLXXIV. Zum 17. Satze. a) Wenn concentrische Kreise um ihren festen Durchmesser als Axenlinie rings umher gedreht werden, so entstehen hierdurch concentrische Kugeln, welche in diesem Satze als Hypothesis zum Grunde liegen.

b) Daß jede Kugel, durch eine Ebene geschnitten, einen Kreis als Durchschnittsfläche gebe, folgt nicht mit hinlänglicher Strenge aus der citirten 14. Erklärung des XI. Buchs. Daher stelle (Fig. 400) FANBH eine Kugel, C ihren Mittelpunct und APBQ den Durchschnitt derselben durch eine Ebene vor. Zieht man hier aus dem Mittelpuncte C auf diese Ebene das Loth CD, nimmt die willkührlichen Puncte E und J an

und zieht DE, DF, CE und CJ, so sind die Dreiecke CDE und CDJ rechtwinkelig. Da nun in ihnen CE = CJ, und auch DE = DJ ist, so muß DE = DJ seyn. Auf ähnliche Art wird bewiesen, daß D von jedem Puncte in dem Umfange AEQJBP gleichweit entfernt ist. Daher muß diese Umfangslinie ein Kreis seyn.

Da $DE^q = CE^q - CD^q$ ist und CD^q immer kleiner wird, je näher die Durchschnittsebene dem Mittelpuncte rückt, so müssen die entstehenden Kreise hier immer größer werden. — Für einen Schnitt durch den Mittelpunct ist CD = 0, folglich DE = CE und man erhält den größten Kreis d. h. jenen, aus dessen Umdrehung die Kugel entstanden ist. Wird CD = CN = CE, so entsteht kein Durchschnittskreis mehr.

CCLXXV. Zum 18. Satze. a) Hier verdienet der von Archimedes zuerst bewiesene Satz eine Stelle, nach welchem die Kugel, ihrem körperlichen Inhalte nach, zwei Drittheile eines Cylinders beträgt, dessen Grundfläche ihr größter Kreis und dessen Höhe ihr Durchmesser ist.

Es sei (Fig. 401) BMA ein Halbkreis, aus B, C und A seien die Lothe BD = CM = AG errichtet und die Linien DM, MG, CD, CG gezogen, so ist CMOA ein Quadrant, CMGA ein Quadrat und CMG ein rechtwinkeliges Dreieck, welchen allen die Linie MC gemein ist.

Werden nun dieselben um diese Linie MC, als feststehende Axe, einmal ganz umher bewegt, so beschreibt der Quadrant die Halbkugel, das Quadrat einen senkrechten Cylinder und das rechtwinkelige Dreieck einen senkrechten Kegel, welche Körper die Höhe MC gemein haben.

Wenn nun die mit BA parallele Ebene QF diese drei Körper durchschneidet, so hat der Durchschnittskreis im Cylinder die Linie NF, jener in der Halbkugel die NO und jener im Kegel die NH zum Halbmesser.

Zieht man nun CO, so ist $CO^q = NO^q + NC^q$. Allein CO = CA = NF und NH = NC, daher auch $NF^q = NO^q + NH^q$. Da sich aber die Kreisflächen wie die Quadrate ihrer Radien verhalten, so ist der Kreis um NF so groß, als die Kreise um NO und um NH zusammen.

Denkt man sich nun eine zweite Durchschnittsebene mit QF gleichlaufend und sehr nahe bei ihr, so liegen zwischen beiden drei Cylinder von gleicher Höhe, deren einer einen Theil des großen Cylinders, der andere einen Theil der Halbkugel und der dritte einen Theil des Kegels bildet.

Weil sich nun Cylinder von gleichen Höhen wie ihre Grundflächen verhalten, so muß der zuerst genannte Cylinder den beiden andern zusammengenommen gleich seyn.

Allein dieses Verhältniß gilt auch für jede andere drei, zwischen zwei solcher Parallelebenen enthaltenen Cylinder, und da die Körper gleiche Höhe MC haben, so können aus jedem soviele solcher Cylinder erhalten werden, wie aus dem andern. Folglich ist der aus Umdrehung von MCAG entstehende Cylinder so groß, als die Halbkugel und der Kegel zusammengenommen. Da aber letzterer ein Drittheil jenes Cylinders ist, so muß die Halbkugel zwei Drittheile desselben betragen und die ganze Kugel dem doppelten Cylinder d. h. einem solchen gleich seyn, dessen Grundfläche der größte Kugelkreis und dessen Höhe ihr Durchmesser ist.

b) Wenn also zwei Kugeln von verschiedenem Durchmesser gegeben sind, so ist jede $2/3$ des Cylinders, der ihren größten Kreis zur Grundfläche und ihren Durchmesser zur Höhe hat. Diese zwei senkrechte Cylinder sind aber einander ähnlich und verhalten sich wie die Würfel ihrer Durchmesser. Folglich stehen alle Kugeln im geraden Verhältnisse der Würfel ihrer Durchmesser. Wenn diese Durchmesser wie 1:2, oder wie 1:3, oder überhaupt wie 1:n sind, so verhalten sich die Kugelräume wie 1:8, wie 1:27, oder wie $1 : n^3$. Bezeichnet man diese Durchmesser mit D, d, die Peripherien ihrer größten Kreise mit P, p, die Flächen dieser Kreise mit F, f, so ist

1) $D : d = P : p.$
2) $D^2 : d^2 = F : f$ und
3) $D^3 : d^3 = K : k,$

wenn diese Kugeln mit K, k bezeichnet werden.

Anhang.

Da gegenwärtige Schrift als Lehrbuch der Elementar-Geometrie dienen soll, worin die theoretischen Sätze von der Berechnung der Figuren und Körper nicht fehlen dürfen, so muß hier das Nöthigste davon vorgetragen werden.

CCLXXVI. Berechnung der ebenen geradlinigen und gemischtlinigen Figuren.

a) In dem Vorhergehenden (LXXV, a—e) sind bereits die allgemeinsten Begriffe und Hülfssätze vom Ausmessen gerader Linien und rechtwinkeliger Parallelogramme entwickelt worden. Um diese Lehre hier etwas weiter auszuführen, bemerke man, daß eine willkührlich gewählte gerade Linie, als Einheit des Längenmaßes, der Fuß genennt wird. Sein zehnter Theil wird Zoll und des Zolles zehnter Theil wird Linie genennt. Eine Länge von zehn Fuß heißt eine Ruthe. Die Zeichen für Ruthen, Fuße, Zolle und Linien sind, in der genannten Ordnung, diese: °, ′, ″, ‴ und es bedeutet z. B. 18° 6′ 5″ 7‴ soviel als 18 Ruthen, 6 Fuße, 5 Zolle und 7 Linien.

Bei dieser zehntheiligen Unterabtheilung sind die Reductionen höherer Maße in niedere, und umgekehrt, sehr einfach. So ist z. B. 24° = 240′ = 2400″ = 24000‴; ferner 16° 8′ = 168′ = 1680″ = 16800‴; weiter 32° 5′ 3″ = 3253″ = 32530‴; dann 8° 7′ 3″ 5‴ = 8735‴; desgleichen 12° 3″ = 1203″ = 12030‴; ferner 18° 7‴ = 18007‴ u. s. w.

Umgekehrt ist 48327‴ = 48° 3′ 2″ 7‴; weiter 30084‴ = 30° 8″ 4‴; ferner 40008‴ = 40° 8‴ u. s. w.

Wenn nun eine gegebene gerade Linie nicht vollkommen genau mit Ruthen ausgemessen werden kann, so bestimme man noch die in ihr enthaltenen Fuße. Bleibt auch hier noch ein

Rest, so drücke man ihn durch Zolle aus, und wenn dieses noch einmal der Fall ist, durch Linien.

b) Die gewöhnliche Einheit des Flächenmaßes ist der Quadratfuß d. h. ein Quadrat, dessen Seite die Länge eines Fußes hat. Hieraus ergibt es sich sogleich, was man Quadratruthe, Quadratzoll und Quadratlinie nennt. Die Zeichen sind diese: q° q' q'' q''' und es heißt $46^{q\circ}$ $18^{q'}$ $27^{q''}$ $8^{q'''}$ soviel als 46 Quadratruthen, 18 Q. Fuße, 27 Q. Zolle und 8 Q. Linien.

Aus dem, was oben (LXXV, d) über die Ausmessung des Quadrates bemerkt worden ist, geht deutlich hervor, daß $1^{q\circ} = 100^{q'}$; ferner $1^{q'} = 100^{q''}$; desgleichen $1^{q''} = 100^{q'''}$ ist. Daher sind auch hier die Reductionen sehr einfach. Es ist z. B. $38^{q\circ} = 8300_{q}' = 830000^{q''} = 83000000^{q'''}$; ferner $24^{q\circ}$ $16^{q'} = 2416_{q}' = 241600^{q''} = 24160000^{q'''}$; desgleichen $36^{q\circ}$ $24^{q'}$ $15^{q''} = 362415^{q''} = 36241500^{q'''}$. Auch ist $12^{q\circ}$ $8^{q'} = 1208^{q'} = 120800^{q''}$; oder $23^{q\circ}$ $6^{q'}$ $8^{q'''} = 23060008^{q'''}$ u. s. f.

Umgekehrt ist auch $5872634^{q'''} = 5^{q\circ}$ $87^{q'}$ $26^{q''}$ $34''$; ferner $36004008^{q'''} = 36^{q\circ}$ $40^{q''}$ $8^{q'''}$; desgleichen $400005^{q'''} = 40^{q\circ}$ $5^{q''}$ u. s. w.

c) Um nun den Flächeninhalt der Rhomboide ABCD (Fig. 387) zu finden, ziehe man von A auf DC das Loth AE und von B auf die verlängerte DC das Loth BF, so ist ADCB = = AEFB. Wird nun EF und AE gemessen und ein Product beider Maße gebildet, so stellt dieses die Menge der quadratischen Maßtheile vor, welche das Rechteck AEFB und somit auch die Rhomboide ADCB enthält. Da EF = DC ist, so kann man auch das Product aus den Maßtheilen von DC in jene von AE als den Inhalt derselben betrachten. Daher entsteht die Regel: Der Flächeninhalt einer Rhomboide wird gefunden, wenn das Maß ihrer Grundlinien mit dem Maße ihrer senkrechten Höhe multiplicirt wird. Da die Ebene der Rhomboide nicht mit quadratischen Maßtheilen genau ausgefüllt werden kann, weil jene keine rechte Winkel, sondern spitze und stumpfe enthält, so wird sie erst in ein ihr gleiches Rechteck verwandelt, bei welchem dieses möglich ist.

Es sei DC = 18° 4′ und AE = 4° 6′, so ist ADCB = 184 × 46 = 8464□′ = 84□° 64□′. — Wäre DC = 6° 3′ 8″ und AE = 1° 9′ 3″, so würde ADCB = 638 × 193 = 123134□″ = 12□° 31□′ 34□″.

d) Wäre (Fig. 389) ABCD eine Raute und AE ein Loth von A auf DC, so würde das Product aus dem Maße von DC in jenes von AE ihren Flächeninhalt darstellen. Denn sie ist einem Rechtecke gleich, dessen Grundlinie = DC und dessen Höhe = AE. Beispiele in Zahlen lassen sich, wie vorhin, leicht berechnen.

Setzt man das Maß der Grundlinie eines gegebenen Parallelogramms = g, das Maß seiner Höhe = h, so stellt das Product g × h seinen quadratischen Inhalt im Allgemeinen dar. Benennt man diesen mit f, so ist f:g = h und f:h = g.

e) Der Inhalt eines rechtwinkeligen Dreiecks ADC (Fig. 267) worin AD = DC oder JML (Fig. 269) worin JM < ML ist, wird gefunden, wenn das Maß der einen Cathete DC oder ML mit jenem der andern Cathete DA oder MJ multiplicirt und das Product halbirt wird. Denn wenn das Quadrat ABCD oder das Rechteck JKLM ergänzt wird, so ist △ ADC = ½ Quadr. ABCD und △ JML = ½ Recht. JKLM.

Für JM = 8° 4′ und ML = 17° 3′ wird △ JML = $\frac{84 \times 173}{2} = 42 \times 173 = 7266□′ = 72□° 66□′$.

Setzt man die Grundlinie, ihrem Maße nach, = g, ebenso die Höhe = h und die Fläche = f, so ist $f = \frac{g \times h}{2} = ½ g \times h = ½ h \times g$, wobei mit Bequemlichkeit ½ g oder ½ h als Factor genommen wird, wenn g oder h eine gerade Zahl ist. Ferner wird f : ½ g = h und f : ½ h = g, oder auch f : g = ½ h und f : h = ½ g.

f) Um den Inhalt des spitzwinkeligen Dreiecks DEK (Fig. 350) zu berechnen, ziehe man das Loth DJ von D auf EK und erinnere sich nun aus den frühern Sätzen, daß es die Hälfte des Rechtecks ist, welches EK zur Grundlinie und DJ zur Höhe

hat. Daher muß auch hier das Maß von EK mit jenem von DJ multiplicirt und dieses Product halbirt werden.

Es sei EK = 14° 8′ und DJ = 12° 4′, so ist △ DEK =

$$1408 \times \frac{1240}{2} = 1408 \times 620 = 872960^{q\prime\prime} = 87^{qo}\ 29^{q\prime}\ 60^{q\prime\prime}.$$

Auf ähnliche Art wird auch das stumpfwinkelige Dreieck berechnet, bei welchem das Loth auf die Verlängerung der Grundlinie fallen kann. Allein, vom Scheitel des stumpfen Winkels gezogen, fällt es immer innerhalb des Dreiecks. Auf gleiche Art könnte auch der Inhalt des rechtwinkeligen Dreiecks gefunden werden.

g) Das Paralleltrapez ABDC (Fig. 271) wird durch die Querlinie BC in zwei Dreiecke ABC und BCD getheilt, welche, in Bezug auf die Grundlinien AB und CD, einerlei Höhe, nämlich den Abstand der Parallelen AB und CD haben. Setzt man denselben = h, nimmt CD = G und AB = g, so ist

$$ABDC = \frac{G \times h}{2} + \frac{g \times h}{2} = (G + g) \times \frac{h}{2} = \frac{G + g}{2} \times h,$$ d. h.

der Inhalt des Paralleltrapez wird gefunden, wenn das Maß der Summe seiner Parallelseiten mit dem halben Maße ihres gegenseitigen Abstandes multiplicirt wird.

Es sei G = 24° 8′, g = 18° 2′ und h = 9° 2′, so wird

$$ABDC = (248 + 182) \times \frac{92}{2} = 430 \times 46 = 19780^{q\prime} =$$

$197^{qo}\ 80^{q\prime}$.

Ein Trapez überhaupt wird berechnet, indem man es durch eine Diagonale in zwei Dreiecke theilt, diese nach ihrem Inhalte bestimmt und summirt. Man wählt hierbei eine solche Diagonale, auf welche jedes der zwei von den ihr gegenüberliegenden Spitzen der Dreiecke gezognen Lothe trifft, um das wirkliche Messen einer vierten Linie zu ersparen. Benennt man mit G, H und h das Maß dieser Diagonale und der beiden Lothe auf sie, so ist $\frac{G \times H}{2} + \frac{G \times h}{2} = (H + h) \times \frac{G}{2} = \left(\frac{H + h}{2}\right) \times G$

der allgemeine Ausdruck des Inhaltes.

h) Da jedes geradlinige Vieleck durch Querlinien in Dreiecke getheilt werden kann; so, daß in einem geradlinigen n Ecke hierdurch n — 2 Dreiecke entstehen, so berechne man den Inhalt jedes dieser Dreiecke und ihre Summe gibt den Flächenraum des Vielecks. Es ist zweckmäßig, die Diagonalen so zu ziehen, daß jede, wo es nur immer möglich ist, als Grundlinie zweier sich gegenüberliegenden Dreiecke angesehen werden kann.

Auch kann bei einer vielseitigen, ablang gestalteten geradlinigen Figur nach ihrer ganzen Länge eine gerade Linie mitten durchgezogen werden, wodurch sie in zwei Theile getheilt wird. Zieht man nun von jedem zu ihren beiden Seiten liegenden Winkelpuncte ein Loth auf dieselbe, so entstehen Parallel=trapeze, welche auf die oben (g.) bemerkte Weise leicht berechnet werden können. Addirt man zu ihrer Summe die an den beiden Endpuncten der Querlinie liegenden rechtwinkeligen Dreiecke, so ist die Summe der Inhalt der gegebnen Figur. Zeichnungen, welche dieses erläutern, sind sehr leicht zu entwerfen.

i) Soll der Inhalt einer Figur bestimmt werden, welche zum Theil von einer krummen Linie eingeschlossen ist, so tritt der für das practische Bedürfniß hinreichende Grundsatz ein: Man kann in jeder krummen Linie so kleine Theile nehmen, daß sie, ohne bedeutenden Fehler, als gerade Linien zu betrachten sind. Obwohl nun die Theile der krummen Linien selbst wieder krumm sind und immer krumm bleiben, so nähern sie sich doch immer mehr dem Geraden, je kleiner sie genommen werden. Wenn nun eine Figur auf der einen Seite durch Winkellinien, auf der andern aber durch eine krumme Linie umgrenzt ist, so ziehe man vom Anfange zum Ende dieser letztern eine gerade Linie durch dieselbe, nehme in der krummen Linie so kleine Stücke, daß sie ohne merkbaren Fehler für gerade gehalten werden, ziehe aus dem Endpuncte eines jeden ein Loth auf diese Querlinie, so entstehen ebenfalls mehrere Paralleltrapeze, welche nach dem Vorigen leicht berechnet werden können. Wird nun hierzu der Inhalt der noch entstehenden

Dreiecke addirt, so ist die Summe der Inhalt der gegebenen Figur. Erläuterungen durch Zeichnungen sind leicht zu geben.

Auf ähnliche Art läßt sich auch der Inhalt einer Figur berechnen, welche rings umher in eine krumme Linie eingeschlossen ist.

CCLXXVII. **Kreisrechnungen.** a) Es ist aus dem Vorhergehenden bekannt, daß der Halbmesser eines Kreises zugleich auch die Seite des in ihn beschriebenen regelmäßigen Sechsecks ist. Wenn daher (Fig. 124) $AG = GB = AB$, so ist AB die Seite des regulären Sechsecks in dem mit GA aus G beschriebenen Kreise. Denkt man sich nun aus G ein Loth auf AB, da, wo es dieselbe schneidet, ein J und da, wo es den Bogen AB halbirt ein M, und zieht die geraden AM und BM, so ist $AM = BM$. Setzt man nun $GA = AB = 1$, so ist $AJ = 1/2$ und es wird $GJ = \sqrt{(1 - 1/4)} = \sqrt{3/4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Nun ist $JM = GM - GJ = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$ und kann ebenfalls berechnet werden. Ferner wird $AM = \sqrt{(1/4 - JM^2)}$ und ist daher ebenfalls leicht zu berechnen. Es ist aber AM die Seite des in den Kreis zu beschreibenden regelmäßigen 12 Ecks. Folglich kann die Größe dieser Seite und folglich auch der Umfang dieses 12 Ecks leicht bestimmt werden.

Durch eine dieser ganz ähnlichen Rechnung findet man aus der Größe der Seite des regelmäßigen 12 Ecks jene des 24 Ecks; aus dieser wiederum jene des 48 Ecks, des 96 Ecks und jedes folgenden regelmäßigen Doppelecks. Auch ergibt sich hieraus der Umfang jedes dieser regelmäßigen Vielecke, und es geht aus den frühern Sätzen der Geometrie hervor, wie hierdurch der Umfang jedes um den Kreis beschriebenen regelmäßigen 6 Ecks, 12 Ecks, 24 Ecks, 48 Ecks u. s. f. berechnet werden kann.

b) Der Erste, welcher den Umfang des Kreises durch regelmäßige Vielecke, in und um denselben beschrieben, zu bestimmen suchte, war der hochberühmte Archimedes, geboren zu Samos im J. 287 v. Chr. Geb. und im 79. Jahre seines Alters bei der Eroberung von Syracus durch die Römer von

einem Soldaten ermordet. Er berechnete, so unvollkommen auch die Arithmetik der Griechen gewesen ist, den Umfang eines in und um den Kreis beschriebenen regelmäßigen 96 Ecks, zwischen welchen die Peripherie dieses Kreises nothwendig fallen muß. Er fand, daß das Verhältniß vom Durchmesser um Umfange des Kreises kleiner sei, als 7:22, aber größer als 71:223. Setzt man

$$7 : 22 = 1 : z \text{ und}$$
$$71 : 223 = 1 : Z, \text{ so wird}$$
$$z = 3{,}14090965 \ldots \text{ und}$$
$$Z = 3{,}14282657 \ldots$$

und die Peripherie muß $> z$ aber $< Z$ seyn. Allein seine Rechnungen sind nicht mit gehöriger Schärfe geführt. Denn genauere Berechnungen geben

$$z = 3{,}14105232 \ldots \text{ und}$$
$$Z = 3{,}14273679 \ldots$$

zwischen welche des Kreises Umfang liegt. Wollte man $\frac{Z+z}{2}$ für die Größe dieses Umfangs setzen, so wäre hierzu kein geometrischer Grund vorhanden, und es bleibt zur genauern Bestimmung nichts übrig, als die innern und äussern Vielecke in Bezug auf ihre Seitenzahl zu verdoppeln und ihre Umfänge durch sehr mühvolle Rechnungen bestimmen. Da $1:z = 1:3{,}14..$ und $1:Z = 1:3{,}14...$ folglich auch $1:z = 100:314$ und $1:Z = 100:314$ ist, so sagt man gewöhnlich, der Durchmesser des Kreises verhalte sich zu seinem Umfange, wie 100:314, welches Verhältniß für mancherlei Anwendungen hinreichend genau ist.

c) Durch ähnliche Rechnungen hat Ludolph van Ceulen diese Annäherungen bis zu regelmäßigen Vielecken von tausend Million Seiten mit unglaublicher Mühe fortgeführt in der Schrift: Van den Cirkel, daerin gheleert werdt te vinden de naeste Proportie des Cirkels Diameter tegen synen Omloop. Delf 1596. Später ging er noch weiter und fand, daß sich der Durchmesser zum Umkreise verhalte wie

1:3,141592 653589 793238 462643 383279 5028...

In neuern Zeiten hat man noch mit weit größerer Schärfe folgendes Verhältniß gefunden:

1:3, 14159 26535 89793 23846
26433 83279 50288 41971
69399 37510 58209 74944
59230 78164 06286 20899
86280 34825 34211 70679
82148 08651 32823 06647
09384 46095 50582 26136...

Diese Zahl 3,14... wird gewöhnlich mit π bezeichnet.

d) Soll nun zu einem gegebenen Durchmesser $= d$ die Peripherie $= p$ berechnet werden, so ist die Proportion diese:

$$1 : \pi = d : d\pi$$

und $d\pi$ stellt diesen Umfang in Zahlen dar.

Für $d = 10°$ wird $p = 31° 4' 1'' 5'''$... Für $d = 1000°$ wird $p = 3141° 5' 9'' 2'''$... Für $d = 15°$ wird $p = 15 \times 3{,}14159$...

Um für einen gegebenen Umfang den Durchmesser zu finden, setze man die Proportion

$$\pi : 1 = p : d,$$

wodurch $d = \frac{p}{\pi}$ wird. Da auch $d = p \times \frac{1}{\pi}$ ist, so berechne man den Werth von $\frac{1}{\pi}$ in Zahlen. Es ist nämlich $\frac{1}{\pi} =$ 0,318309886183790671 53... Wäre nun $p = 1000°$, so würde hiernach $d = 318° 3' 0'' 9'''$ u. s. w.

e) Auch kann, bei gegebenem Durchmesser und dem in Graden gegebenen Mittelpunctswinkel, die Größe des ihm zugehörigen Kreisbogens berechnet werden. Denn es wird sich immer 360° zu dem gegebenen Winkel verhalten, wie sich die ganze Peripherie zu dem zu findenden Bogen verhält. Setzt man diesen Winkel $= n°$, die Peripherie des Kreises $= p$, so ist hier

$$360° : n° = p : x \text{ und}$$

$$x = \frac{n}{360} \times p.$$

Ganz auf ähnliche Weise kann man aus der gegebenen Größe eines Kreisbogens und aus der Zahl der Grade, welche der ihm zugehörige Mittelpunctswinkel enthält, den Durchmesser des Kreises berechnen. Ist der gegebene Bogen $= b$, die Zahl der Grade des gegebenen Winkels $= n°$, so ist

$$n° : 360° = b : p,$$

woraus die Peripherie des Kreises oder $p = \frac{360}{n} \times b$ wird, woraus man sodann seinen Durchmesser berechnet.

Zahlenbeispiele können sehr leicht bere : net werden. Auch läßt sich leicht folgende Frage beantworten: Wie groß ist jener Mittelpunctswinkel in einem gegebenen Kreise, dessen Bogen dem Durchmesser dieses Kreises, oder seinem Halbmesser gleich ist?

f) Die Kreisfläche ist einem Dreiecke gleich, dessen Grundlinie seiner Peripherie, dessen Höhe seinem Halbmesser gleich ist. — Denn wenn man in einem Kreise ein Quadrat, dann ein regelmäßiges 8Eck, 16Eck, 32Eck, 64Eck u. s. f. beschreibt, so ist oben (XII. Buch, 2. Satz) bewiesen, daß man hierdurch von dem Kreise mehr als die Hälfte, dann von dem Reste wieder mehr als die Hälfte u. s. w. hinwegnimmt. Wenn aber dieses immer fort geschehen kann, so bekömmt man einmal einen Rest, welcher kleiner als jede angegebene Größe ist (CCLIX a u. b), folglich entsteht einmal ein regelmäßiges 2^nEck im Kreise, welches demselben so nahe kömmt, daß der Unterschied seiner Fläche von jener des Kreises kleiner als jede gegebene Größe ist. Denkt man sich vom Mittelpuncte nach jedem Scheitelpuncte dieses Vielecks eine gerade Linie, so besteht der Kreis aus 2^n congruenter Dreiecke. Da aber, wie man leicht einsieht, die Summe der Grundlinien aller dieser Dreiecke (bis auf etwas höchst unbedeutendes) der Peripherie des Kreises und die Höhe eines dieser Dreiecke (ebenfalls ohne merkbaren Fehler) der Halbmesser ist, so geht hieraus die Wahrheit obiger Behauptung hervor.

g) Ist daher die Peripherie eines Kreises $= p$, sein Durchmesser $= d$, so ist seine Fläche $F = p \times \frac{d}{4}$. Da aber $p = \pi d$

ist, so wird $F = \pi d \times \frac{d}{4} = \pi \times \frac{d^2}{4} = \pi r^2$, wenn r den Halbmesser bezeichnet, da das Quadrat des Radius der vierte Theil vom Quadrate des Durchmessers ist. Für $r = 10°$ wird $F = 100 \times 3{,}1415 \ldots = 314° \; 1' \; 5''$ u. s. w.

Da $F = r^2\pi$, so ist auch $\frac{F}{\pi} = r^2 = F \times \frac{1}{\pi} = F \times 0{,}31830988618379 \ldots$ folglich $r = \sqrt{F} \times 0{,}31830988 \ldots = \sqrt{0{,}31830988} \ldots \times \sqrt{F}$. Wird nun $\sqrt{0{,}31830988} \ldots$ ein für allemal berechnet, so ist sie ein beständiger Factor von $\sqrt{F}$ und das Product gibt den Halbmesser des Kreises bei gegebenem Inhalte.

h) Wenn der Durchmesser des Kreises und die Größe eines Centriwinkels in Graden gegeben ist, so kann der Flächenraum des ihm entsprechenden Ausschnittes berechnet werden. Denn es verhält sich $360°$ zu $n°$ wie die ganze Kreisfläche sich zu diesem Ausschnitte verhält. Daher wird hier

$$360° : n° = r^2\pi : A$$

und folglich Ausschnitt $A = \frac{n}{360} r^2\pi = r^2 n \times \frac{\pi}{360}$. Wird der Zahlenwerth von diesem Bruche $\frac{\pi}{360}$ berechnet, so ist derselbe ein beständiger Factor von $r^2 n$, um A zu bestimmen.

Aus $A = \frac{nr^2\pi}{360}$ wird nun auch $n = \frac{360\,A}{r^2\pi} = \frac{360}{\pi} \times \frac{A}{r^2}$.

Wird hier die Zahl $\frac{360}{\pi}$ ein für allemal berechnet, so darf sie nur mit $\frac{A}{r^2}$ multiplicirt werden, um aus dem Halbmesser eines Kreises und der Fläche seines Ausschnitts den Winkel dieses Ausschnitts zu finden.

Nach diesem Muster können auch andere, diesen ähnliche Aufgaben behandelt werden.

i) Kreisabschnitte werden berechnet, wenn man von den ihnen entsprechenden Ausschnitten die darin liegenden Dreiecke wegnimmt. Die Größe der Ausschnitte wird nach dem Vorher-

gehenden bestimmt; das Dreieck aber aus dem Maße seiner Grundlinie und Höhe (wenn sich nicht eine bessere Methode darbietet) berechnet.

Die Fläche eines Ringes, d. h. des Unterschiedes zweier concentrischer Kreise wird, wenn der größere Radius $= R$, der kleinere $= r$ gesetzt wird, durch $R^2\pi - r^2\pi = (R^2 - r^2)\pi$ bestimmt. Sollte der Ring ein bestimmter Theil des größern Kreises seyn, so müßte $(R^2 - r^2)\pi$ ein solcher Theil von $R^2\pi$, folglich $R^2 - r^2$ eben dieser Theil von R^2 seyn.

Sollte z. B. der Ring den sechsten Theil des größern Kreises betragen, so müßte auch $\frac{R^2}{R^2 - r^2} = 6$, folglich $R^2 = 6R^2 - 6r^2$ und $6R^2 - R^2 = 6r^2$, daher $5R^2 = 6r^2$ und $r^2 = \frac{5}{6}R^2$ seyn. Nun ist es leicht, ein Quadrat zu finden, welches $\frac{5}{6}$ eines gegebenen ist (CLXIV.), folglich ist r hierdurch bestimmt.

Auch lassen sich leicht die Ausschnitte des Rings berechnen.

CCLXXVIII. Berechnung der Körper und ihrer Oberflächen.

a) Das Maß zur Berechnung der Körper muß selbst ein Körper seyn. Zur Einheit dieses Messens wählt man den Cubikfuß, d. h. einen Würfel, dessen Seite einen Fuß beträgt. Denkt man sich nun einen Würfel, dessen Seite einer Ruthe gleich ist, so können 10 Cubikfuße an dieser Seite neben einander und ebenfalls 10 derselben an die andere Seite der Grundfläche neben einander, und folglich 10mal 10 d. h. 100 auf die ganze Grundfläche gestellt werden. Da nun auch 10 Cubikfuße in der Seite, welche die Höhe der Cubikruthe bestimmt, über einander zu stellen sind, so muß der Raum der Cubikruthe 10 Schichten solcher Cubikfuße, in deren jeder sich 100 befinden, d. h. er muß 100mal 10 oder 1000 Cubikfuße enthalten. Bezeichnet man die Cubikruthen mit ^{cr}, Cubikfuße mit $^{c'}$, Cubikzolle mit $^{c''}$ und Cubiklinien mit $^{c'''}$, so hat man $1^{cr} = 1000^{c'}$; $1^{c'} = 1000^{c''}$; $1^{c''} = 1000^{c'''}$.

b) Nach diesem sind die Reductionen höherer Maßtheile in niedere, und umgekehrt, auch hier sehr einfach. Es ist z. B.

$83^{co}\ 425^{c\prime} = 83425^{c\prime}$; oder $46^{c\prime}\ 58^{c\prime\prime} = 46058^{c\prime\prime}$; oder $7^{co}\ 14^{c\prime}\ 28^{c\prime\prime} = 7014028^{c\prime\prime}$; ferner $14^{co}\ 12^{c\prime\prime\prime} = 14000000012^{c\prime\prime\prime}$ u. s. w.

Auch ist umgekehrt $84325^{co} = 84^{co}\ 325^{c\prime}$; ferner $43298764^{c\prime\prime\prime} = 43^{c\prime}\ 298^{c\prime\prime}\ 764^{c\prime\prime\prime}$; oder $5300780046^{c\prime\prime\prime} = 53^{co}\ 7^{c\prime}\ 800^{c\prime\prime}\ 46^{c\prime\prime\prime}$ u. s. w.

c) Soll nun der Inhalt eines gegebenen Würfels gefunden werden, so messe man seine Seite, so genau es möglich ist, durch Schuhe, Zolle, Linien; multiplicire dieses Maß zweimal mit sich selbst, so zeigt das Product die Menge der Cubikmaßtheile seines Inhaltes. Denn es ist nach dem Vorhergehenden klar, daß der Raum des Würfels durch die hier gefundene Zahl der Cubikmaßtheile genau ausgefüllt werden kann.

Es sei das Maß seiner Seite $= 8^{\circ}\ 2^{\prime\prime}\ 5^{\prime\prime\prime}$, so ist dessen Inhalt $= 8025 \times 8025 \times 8025^{c\prime\prime\prime} = 416815016625^{c\prime\prime\prime} = 416^{co}\ 315^{c\prime}\ 16^{c\prime\prime}\ 625^{c\prime\prime\prime}$. Wäre die Seite des Würfels $= 3'\ 4''$, so würde sein Inhalt $= 34 \times 34 \times 34^{c\prime\prime} = 39304^{c\prime\prime} = 39^{c\prime}\ 304^{c\prime\prime}$ seyn.

d) Um den Inhalt eines senkrechten Parallelopipedums mit rechtwinkeliger Grundfläche zu finden, messe man sowohl die Grundlinie und Höhe der Grundfläche, als auch die Höhe mit demselbigen Maße, z. B. mit dem Längenfuße, multiplicire diese drei Zahlen mit einander, so zeigt das Product die Menge der Cubikfuße an, welche der Körper enthält. Denn wenn z. B. die Grundlinie der Grundfläche $= 6'$ und ihre Höhe $= 4'$ ist, so können auf ihre Fläche $6 \times 4 = 24$ Cubikfuße gestellt werden. Betrüge nun die Höhe 8 Fuß, so würden 8 Schichten von Cubikfußen, deren jede 24 enthält, übereinandergestellt, den Inhalt des Körpers bilden, welcher daher $= 24 \times 8 = 192^{c\prime}$ ist.

Soll der Inhalt eines schiefen Parallelopipedums von schiefwinkeliger Grundfläche gefunden werden, so messe man die Grundlinie und die senkrechte Höhe der Grundfläche, nebst der lothrechten Höhe des Körpers mit einerlei Längenmaße, multiplicire dieselbe mit einander, so stellt das Product die Cubikmaßtheile desselben vor. Denn es wird hier der Inhalt eines durchaus senkrechten Parallelopipedums gefunden, welches,

nach dem Vorhergehenden, mit dem gegebenen einerlei Inhalt hat. Lassen sich diese drei Linien nicht genau mit Fußen ausmessen, so bestimme man sie noch in Zollen und Linien. Es sei die erste = 4′ 7″, die zweite = 3′ 2″ und die dritte = 8′ 1″, so ist der Inhalt = 47 × 32 × 81^{c}″ = 121824^{c}″ = 121^{c}′ 824^{c}″.

e) Da jedes dreieckige Prisma die Hälfte eines Parallelopipedums von der doppelten Grundfläche und der nämlichen Höhe ist, so findet man den Inhalt dreieckiger Prismen, wenn das Maß ihrer Grundflächen mit jenem ihrer senkrechten Höhen multiplicirt wird. Wäre die Grundfläche = 34^{q}′ und die lothrechte Höhe = 15′, so würde der Inhalt = 510^{c}′ seyn.

Soll ein vieleckiges Prisma berechnet werden, so multiplicire man das Maß seiner Grundfläche (welche als Vieleck ausgemessen wird) mit jenem seiner lothrechten Höhe. Denn ein solches n eckiges Prisma besteht aus n — 2 dreieckigen Prismen, welche in ihrer Summe dem ebengenannten Producte gleich sind. Zahlenbeispiele können leicht hierüber berechnet werden.

f) Da alle Cylinder prismatische Körper sind, so ist ihr Inhalt ebenfalls dem Producte aus dem Inhalte ihrer Grundflächen in das Maß ihrer senkrechten Höhen gleich. Setzt man den Halbmesser der Grundfläche = r, die senkrechte Höhe = h, so ist $r^2\pi$ der Inhalt der Grundfläche und $r^2\pi h$ stellt den Inhalt des Cylinders dar. Nimmt man diesen = C, so ist $C = r^2\pi h$, folglich $h = \frac{C}{r^2\pi}$ und $r^2 = \frac{C}{\pi h}$, daher $r = \sqrt{\frac{C}{\pi h}}$, worüber man leicht Beispiele in Zahlen berechnen kann.

Der Umfang eines senkrechten Cylinders ist einem Rechtecke gleich, dessen Grundlinie die Peripherie seiner Grundfläche und dessen Höhe seiner Seite, oder auch seiner Axe gleich ist. Denn so wie man sich dem Inhalte des Kreises seiner Grundfläche durch eingeschriebene Vielecke von immer verdoppelter Seitenzahl so weit annähern kann, als man will (CCLXXVII, f), so gilt diese Annäherung auch für die fortgesetzt in dem lothrechten Cylinder beschriebenen vielseitigen Prismen, wodurch

die Summe ihrer Seitenflächen der krummen Seitenfläche des senkrechten Cylinders ebenfalls so nahe kömmt, als man will. Nimmt man den Halbmesser der Grundfläche $= r$, die Seite des Cylinders $= s$, so ist $2r\pi s$ seiner krummen Seitenfläche gleich. Nennt man sie F, so ist $F = 2r\pi s$, folglich $r = \frac{F}{2\pi s}$ und $s = \frac{F}{2r\pi}$, wozu sich leicht Beispiele berechnen lassen.

Die krumme Seitenfläche des schiefen Cylinders ist weit schwieriger zu berechnen.

g) Man findet den Inhalt einer dreieckigen Pyramide, wenn das Product aus dem Maße ihrer Grundfläche in jenes ihrer senkrechten Höhe mit 3 dividirt wird. Denn sie ist der 3te Theil eines dreieckigen Prisma's von der nämlichen Grundfläche und Höhe. Da jede neckige Pyramide sich in $n-2$ dreieckige von derselbigen Höhe zertheilen läßt, so wird auch jede vieleckige auf ähnliche Art berechnet. Ist ihre Grundfläche, dem Maße nach, $= g$, die Höhe $= h$, die Pyramide $= P$, so ist $P = \frac{g \times h}{3} = g/_3 \times h = \frac{h}{3} \times g$, worüber sich leicht Beispiele berechnen lassen.

h) Der Kegel ist, wie bekannt, der dritte Theil eines Cylinders von derselbigen Grundfläche und Höhe. Setzt man daher den Halbmesser dieser Grundfläche $= r$, die Höhe des Kegels $= h$, so ist $\frac{r^2\pi h}{3}$ der Inhalt dieses Körpers. Nennt man ihn K, so ist $K = \frac{r^2\pi h}{3}$, daher $h = \frac{3K}{r^2\pi}$ und $r^2 = \frac{3K}{\pi h}$, folglich auch $r = \sqrt{\frac{3K}{h\pi}}$.

Die krumme Seitenfläche eines senkrechten Kegels ist einem Dreiecke gleich, dessen Grundlinie die Peripherie seiner Grundfläche und dessen Höhe seine Seitenlinie ist. Denn wenn man sich diese Peripherie als ein regelmäßiges Vieleck von sehr vielen Seiten denkt, und von jedem Scheitelpuncte desselben nach der Spitze des Kegels eine gerade Linie zieht, so besteht die Kegelfläche aus sehr vielen unter sich congruenten Dreiecken,

deren Summe als die Kegelfläche selbst zu betrachten ist. Diese Summe ist aber, wie man leicht sieht, dem vorerwähnten Dreiecke gleich. Wenn r der Halbmesser der Grundfläche und s die Seite des Kegels ist, so wird seine Fläche $= F = \frac{2r\pi s}{2}$ $= r\pi s$; folglich ist $r = \frac{F}{s\pi}$ und $s = \frac{F}{r\pi}$.

Die Berechnung der Oberfläche des schiefen Kegels bietet bedeutende Schwierigkeiten dar.

i) Da der Inhalt der Kugel $^2/_3$ eines Cylinders gleich ist, dessen Grundfläche von ihrem größten Kreise und dessen Höhe von ihrem Durchmesser gebildet wird, so kann ihr Inhalt leicht hierdurch berechnet werden. Es sei r ihr Durchmesser, so ist $r^2\pi$ die Fläche ihres größten Kreises und folglich $r^2\pi \times 2r = 2r^3\pi$ der körperliche Inhalt des Cylinders, von welchem sie $^2/_3$ ist. Nennt man die Kugel K, so ist $K = 2r^3\pi \times {}^2/_3 = \frac{4r^3\pi}{3} = r^3 \times \frac{4\pi}{3} = 4{,}1887901\ldots \times r^3$.

Für $r = 10'$ würde somit $K = 4{,}1887901 \times 1000 = 4188{,}7901^{c\prime} = 4^{co}\ 188^{c\prime}\ 790^{c\prime\prime}\ldots$.

Für $r = 1'$ wird $K = 4^{c\prime}\ 188^{c\prime\prime}\ 790'''\ldots$ Aus $K = \frac{4\pi r^3}{3}$ folgt noch weiter $r^3 = \frac{3K}{4\pi}$ und $r = \sqrt[3]{\frac{3K}{4\pi}} = \sqrt[3]{\frac{3}{4\pi}} \times \sqrt[3]{K}$, wo der erste Factor $\sqrt[3]{\frac{3}{4\pi}}$ leicht in Zahlen berechnet und als beständige Größe gebraucht werden kann. Diese Formel für r dient dazu, um die Größe des Halbmessers einer Kugel zu finden, welche einen bestimmten Inhalt haben soll.

k) Um die Oberfläche einer Kugel zu berechnen, bemerke man folgenden Hülfssatz: Die Kugel ist einer Pyramide gleich, welche zur Grundfläche die Oberfläche der Kugel und zur Höhe ihren Halbmesser hat. Der Beweis folgt aus den Hülfssätzen im 17. u. 18. Satze des XII. Buchs der Elemente und kann auf populäre Art auch so geführt werden.

Man denke sich die Oberfläche der Kugel in eine sehr große Zahl sehr kleiner, unter sich gleicher Vierecke getheilt

und aus ihrem Mittelpuncte nach jedem ihrer Scheitelpuncte gerade Linien gezogen, so besteht die Kugel aus einer eben so großen Menge sehr kleiner unter sich congruenter viereckigen Pyramiden, deren gemeinschaftliche Höhe der Radius ist. Da nun die Summe ihrer Grundflächen die Oberfläche der Kugel bildet, so muß ihr körperlicher Inhalt der oben bemerkten Pyramide gleich seyn.

Setzt man nun ihren Inhalt $= K$, ihre Oberfläche $= F$ und ihren Halbmesser $= r$, so ist nunmehr $K = F \times \frac{r}{3}$, folglich auch $F = \frac{3K}{r}$. Allein $K = \frac{4r^3\pi}{3}$, daher $F = \frac{3 \times 4r^3\pi}{3r} = 4r^2\pi$. Da nun $r^2\pi$ den Inhalt des größten Kreises der Kugel darstellt, so ist der allgemeine Satz bewiesen: Die Oberfläche der Kugel ist viermal so groß als die Fläche ihres größten Kreises.

Da $F = 4r^2\pi = r^2 \times 4\pi = r^2 \times 13{,}56636 \ldots$ ist, so dient dieser beständige Factor bequem zur Berechnung der Kugelfläche. Für $r = 10'$ würde $F = 100 \times 12{,}56636 \ldots = 12^{\square o}\ 56^{\square\prime}\ 63^{\square\prime\prime} \ldots$

Aus $F = r^2 \times 12{,}56636 \ldots$ folgt auch $r^2 = \frac{F}{12{,}56636 \ldots}$ $= F \times \frac{1}{12{,}56636'}$, daher $r = \sqrt{F} \times \sqrt{\frac{1}{12{,}56636 \ldots}}$ wo dann der letzte Factor als unveränderliche Zahl ein für allemal berechnet werden kann.

Durch Logarithmen wird die Formel $r^2 = \frac{F}{4\pi}$ diese:

$$2 \text{ Log. } r = \text{Log. } F - \text{Log. } 4\pi, \text{ daher}$$

$$\text{Log. } r = \frac{\text{Log. } F - \text{Log } 4\pi}{2}.$$

Es sei $F = 64^{\square\prime}$, so ist

Log. 64 = 1,8061800. Ferner ist

Log. π = 0,4971498726941338543512 7...

Log. 4 = 0,6020600, also

Log. 4π = 1,0992098, nun war

Log. F = 1,8061800, daher

BSB Bayerische StaatsBibliothek

MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Euclides,

Die geometrischen Bücher der Elementa des Euclides als Leitfaden zum Unterrichte in der Elementar-Geometrie

Mainz 1829

A.gr.b. 1445 y
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10235934-9